n を自然数とする．

(1) 二項定理を用いて $(z+z^{-1})^{2n}$ を展開せよ．ただし，z は 0 でない複素数とする．

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおき，(1) の展開式を用いて，等式

$$\begin{aligned}(2\cos\theta)^{2n} =& {}_{2n}\mathrm{C}_0\cos(2n\theta)+{}_{2n}\mathrm{C}_1\cos(2(n-1)\theta)+\cdots\\ &+{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\cos(-2n\theta)\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．ただし，i は虚数単位である．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}\,d\theta=\frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

(17 北海道大 後 理・工 2)

【答】

(1) $(z+z^{-1})^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0z^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_1z^{2(n-1)}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_kz^{2(n-k)}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}z^{-2n}$

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) 二項定理を用いて展開すると

$$\begin{aligned}&(z+z^{-1})^{2n}\\ &=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_kz^{2n-k}(z^{-1})^k\\ &=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_kz^{2(n-k)}\\ &=\boldsymbol{{}_{2n}\mathrm{C}_0z^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_1z^{2(n-1)}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_kz^{2(n-k)}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}z^{-2n}}\quad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき，ド・モアブルの定理より，(1) の展開式は

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\{(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))\}^{2n}\\ &=\{(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)\}^{2n}\\ &=(2\cos\theta)^{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\{\cos(2(n-k)\theta)+i\sin(2(n-k)\theta)\}\\ &=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)+i\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\sin(2(n-k)\theta)\end{aligned}$$

となる．左辺と右辺の実部を比較すると

$$\begin{aligned}(2\cos\theta)^{2n}&=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)\\ &={}_{2n}\mathrm{C}_0\cos(2n\theta)+{}_{2n}\mathrm{C}_1\cos(2(n-1)\theta)+\cdots\\ &\quad+{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\cos(-2n\theta)\end{aligned}$$

が成り立つ．　……(証明終わり)

- 虚部の $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k \sin(2(n-k)\theta)$ が 0 であることを確認しておく．

  ${}_{2n}\mathrm{C}_k = {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-k}$ であることより

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k \sin(2(n-k)\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n}\mathrm{C}_k \{\sin(2(n-k)\theta) + \sin(2(n-(2n-k))\theta)\} + {}_{2n}\mathrm{C}_n \sin(2(n-n)\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n}\mathrm{C}_k \{\sin(2(n-k)\theta) - \sin(2(n-k)\theta))\} + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(3) (2) の等式は

$$(\cos\theta)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k \cos(2(n-k)\theta)$$

と変形される．両辺を $\theta = 0$ から $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ まで積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta &= \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k \cos(2(n-k)\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \left({}_{2n}\mathrm{C}_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(n-k)\theta)\, d\theta \right)
\end{aligned}$$

となる．

$k \fallingdotseq n$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(n-k)\theta)\, d\theta = \left[\frac{\sin(2(n-k)\theta)}{2(n-k)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$k = n$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(n-k)\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot {}_{2n}\mathrm{C}_n \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}
\end{aligned}$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

- $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおくと

$d\theta = -dt$

θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0

  であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right)^{2n} (-1)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n}\, d\theta
\end{aligned}$$

  すなわち

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

が成り立つ．