$p \geqq 0,\ q \geqq 0$ に対して，定積分 $I(p,\ q)$ を次のように定める．

$$I(p,\ q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$$

(1) $I(p,\ 0) = \boxed{\text{ア}}$ である．$q > 0$ のとき，$I(p,\ q)$ に対し，部分積分法を 1 回用いると

$$I(p,\ q) = \boxed{\text{イ}}\, I\left(p+1,\ \boxed{\text{ウ}}\right)$$

を得る．この関係式より，$m,\ n$ を自然数とすると

$$I(m,\ n) = \frac{\boxed{\text{エ}}}{(m+n+1)!}$$

が得られる．

(注：$\boxed{\text{エ}}$ には，I を用いない $m,\ n$ の式を入れよ．)

(2) 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフが，x 軸と 2 つの共有点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(\alpha < \beta,\ \alpha\beta \neq 0)$ をもち，$x = \beta$ で x 軸に接するとする．この 3 次関数 $f(x)$ について，$f(0) = 2\alpha\beta^2$ であるとき，$f(x)$ の最高次の係数は $\boxed{\text{オ}}$ である．このとき，この 3 次関数のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S を $I(1,\ 2)$ を用いて表すと

$$S = \boxed{\text{カ}}\, I(1,\ 2)$$

となる．特に $S = \dfrac{3}{8}$ のとき，$\beta - \alpha = \boxed{\text{キ}}$ である．

(注：$\boxed{\text{カ}}$ には，積分記号を含まない $\alpha,\ \beta$ の式を入れよ．$\boxed{\text{キ}}$ には，数を入れよ．)

(3) 最高次の係数が 1 である 6 次関数 $y = g(x)$ について，方程式 $g(x) = 0$ が $x = \alpha$ のとき 2 重解，$x = \beta$ のとき 4 重解をもつとする．ただし，$\alpha < \beta$ とする．このとき，曲線 $y = g(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(17 年 立命館大 全学統一 理系 2 月 2 日 1)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
$\dfrac{1}{p+1}$	$\dfrac{q}{q+1}$	$q-1$	$m!\,n!$	-2	$2(\beta-\alpha)^4$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\dfrac{1}{105}(\beta-\alpha)^7$

【チェック・チェック】

(1) はベータ関数と呼ばれるもので，部分積分の練習問題として手ごろで，どの参考書にも載っていると思います．

さらに，(2)(3) が加わり，置換積分も必要になってきます．区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の変数 x を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ の変数 t に置き換えるのですから，幅 $x-\alpha$ と $\beta-\alpha$ の比を考えて

$$t = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

とおけばよいですね．

【解答】

$$I(p,\ q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx \qquad (p \geqq 0,\ q \geqq 0)$$

(1) $$I(p,\ 0)=\int_0^1 x^p\,dx=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{p+1}} \quad \cdots\cdots ①$$

←　p は 0 以上の実数である．

$\cdots\cdots$ (アの答)

である．

$q>0$ のとき，部分積分法を 1 回行うと

$$\begin{aligned}
&I(p,\ q)\\
&=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{p+1}}{p+1}\cdot q(1-x)^{q-1}(-1)\,dx\\
&=\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx\\
&=\boxed{\frac{q}{p+1}}I\Big(p+1,\ \boxed{q-1}\Big) \qquad \cdots\cdots \text{(イ，ウの答)}
\end{aligned}$$

←　解答欄にあうように x^p を積分し，$(1-x)^q$ を微分するように部分積分する．チェクリピ 221

←　$I(p,\ q)$ についての漸化式が得られた．

を得る．この関係式を繰り返し用いると，$m,\ n$ が自然数のとき

$$\begin{aligned}
I(m,\ n)&=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}I(m+2,\ n-2)\\
&=\cdots\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdots\\
&\qquad\cdots\frac{2}{m+n-1}\cdot\frac{1}{m+n}I(m+n,\ 0)\\
&=\frac{n!\,m!}{(m+n)!}\ \frac{1}{m+n+1} \qquad (\because\ ①)\\
&=\frac{\boxed{m!\,n!}}{(m+n+1)!} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots \text{(エの答)}
\end{aligned}$$

←　キレイな結果ですね．

が得られる．

(2) 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフが，x 軸と 2 つの共有点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(\alpha<\beta)$ をもち，$x=\beta$ で x 軸に接するとすることより

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)^2 \quad (a \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0)$$

←　「接する」$\iff$「重解をもつ」

とおける．条件 $f(0)=2\alpha\beta^2$ より

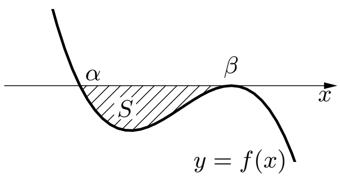
$$-a\alpha\beta^2=2\alpha\beta^2$$

であるから，$\alpha\beta \neq 0$ より，最高次の係数 a は

$$a=\boxed{-2} \qquad \cdots\cdots \text{(オの答)}$$

である．

このとき，この 3 次関数のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S は



$$\begin{aligned}
S&=-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\\
&=2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx\\
&=2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx
\end{aligned}$$

$t = \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ と置換すると，$x-\alpha = (\beta-\alpha)t$ より

⟵ (1) の積分が現れるように変数変換します．この置き換えがこの問題の華 (はな) ですね．

$$dx = (\beta-\alpha)dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & \alpha & \longrightarrow & \beta \\ \hline t & 0 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^1 (\beta-\alpha)t\{\beta-\alpha-(\beta-\alpha)t\}^2 \cdot (\beta-\alpha)dt \\ &= 2(\beta-\alpha)^4 \int_0^1 t(1-t)^2\,dt \\ &= \boxed{2(\beta-\alpha)^4} I(1,\ 2) \qquad \cdots\cdots \text{(カの答)} \\ &= 2(\beta-\alpha)^4 \cdot \frac{1!\,2!}{(1+2+1)!} \quad (\because\ ②) \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^4}{6} \end{aligned}$$

⟵ (1) の積分が現れた．

となる．

特に，$S = \dfrac{3}{8}$ のとき

$$\frac{(\beta-\alpha)^4}{6} = \frac{3}{8} \qquad \therefore \quad (\beta-\alpha)^4 = \frac{9}{4}$$

$\beta - \alpha > 0$ より

$$\beta - \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}} \qquad \cdots\cdots \text{(キの答)}$$

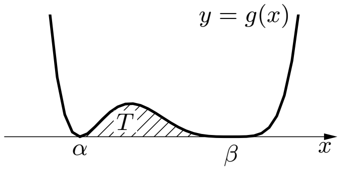
である．

(3) 最高次の係数が 1 である 6 次関数 $y = g(x)$ について，方程式 $g(x) = 0$ が $x = \alpha$ のとき 2 重解，$x = \beta$ のとき 4 重解 $(\alpha < \beta)$ をもつから

$$g(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^4$$

⟵ 「2 重解」,「4 重解」をもつ．

とおける．このとき，曲線 $y = g(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 T は



$$\begin{aligned} T &= \int_\alpha^\beta g(x)\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)^4\,dx \\ &= (\beta-\alpha)^7 \int_0^1 t^2(1-t)^4\,dt \\ &\qquad \left((2) \text{ と同じく，} t = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ とおいた} \right) \\ &= (\beta-\alpha)^7 I(2,\ 4) \\ &= (\beta-\alpha)^7 \cdot \frac{2!\,4!}{(2+4+1)!} \\ &= \boxed{\frac{(\beta-\alpha)^7}{105}} \qquad \cdots\cdots \text{(クの答)} \end{aligned}$$

⟵ (1) の利用を考える．

である．