実数全体を定義域とする関数

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

に対して，その逆関数を $f^{-1}(x)$ と表す．曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし，曲線 $y = f^{-1}(x)$ を C_2 とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．また，$y = f(x)$ の値域を求めよ．

(2) $f^{-1}(x)$ を求めよ．また，C_1 と C_2 の交点をすべて求めよ．

(3) 変数変換 $x = \alpha\tan\theta$ を用いて，定積分 $J = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ を求めよ．ただし，α は正の定数とする．

(4) 2 曲線 C_1，C_2 の $x \geqq 0$ の部分で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(17 大阪府大 中期 工 5)

【答】

(1) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{(1+2x^2)\sqrt{1+2x^2}}$，$-1 < y < 1$

(2) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2(1-x^2)}}$，$(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) $J = \dfrac{\pi}{4\alpha}$

(4) $v = \pi\left\{\dfrac{3\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi + \dfrac{1}{2}\log(\sqrt{2}-1)\right\}$

【解答】

(1)
$$C_1 : f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{2}x\cdot\dfrac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}}}{1+2x^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1+2x^2) - 2\sqrt{2}x^2}{(1+2x^2)\sqrt{1+2x^2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{(1+2x^2)\sqrt{1+2x^2}}} \end{aligned}$$ ……(答)

したがって，$f'(x) > 0$ であり，$f(x)$ は単調増加である．

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

であるから，$y = f(x)$ の値域は

$\boldsymbol{-1 < y < 1}$ ……(答)

(2) $y = \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+2x^2}}$ …… ① とおき，x について解く．

$$
\begin{aligned}
① &\iff y\sqrt{1+2x^2} = \sqrt{2}x \\
&\iff \begin{cases} y^2(1+2x^2) = 2x^2 \\ xy \geqq 0 \qquad (x,\ y \text{ は同符号である}) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2(1-y^2)x^2 = y^2 \\ xy \geqq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(1) より，$-1 < y < 1$ であり，$x,\ y$ は同符号であることに注意すると

$$
① \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{y^2}{2(1-y^2)} \\ xy \geqq 0 \end{cases} \iff x = \frac{y}{\sqrt{2(1-y^2)}} \qquad (x,\ y \text{ は同符号})
$$

よって，　$f^{-1}(x) = \boldsymbol{\dfrac{x}{\sqrt{2(1-x^2)}}}$ ……(答)

次に，$y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ は直線 $y = x$ に関して対称であるから，C_1 と C_2 の交点は C_1 と $y = x$ の交点でもある．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+2x^2}} = x \\
\iff &\sqrt{2}x = x\sqrt{1+2x^2} \\
\iff &x = 0 \text{ または } 2 = 1 + 2x^2 \\
\therefore\ &x = 0 \text{ または } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

よって，C_1 と C_2 の交点は

$$
\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \qquad \text{……(答)}
$$

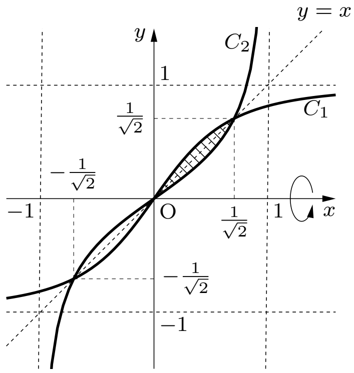
(3) $x = \alpha \tan\theta$ とおくと

$$
dx = \frac{\alpha}{\cos^2\theta}\, d\theta \qquad
\begin{array}{c|ccc}
x & 0 & \longrightarrow & \alpha \\
\hline
\theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{4}
\end{array}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\alpha} \frac{dx}{x^2+\alpha^2} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\alpha^2(1+\tan^2\theta)} \cdot \frac{\alpha}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4\alpha}} \qquad \text{……(答)}
\end{aligned}
$$

(4) $f'(x)$ は $x \leqq 0$ において単調増加，$x \geqq 0$ において単調減少であるから $f(x)$ は $x \leqq 0$ において下に凸，$x \geqq 0$ において上に凸であるから，C_1，C_2 を図示すると右図のようになる．



V は斜線部分をの部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積であるから

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \{(f(x))^2 - (f^{-1}(x))^2\}\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{\frac{2x^2}{1+2x^2} - \frac{x^2}{2(1-x^2)}\right\} dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{\frac{(1+2x^2)-1}{1+2x^2} + \frac{(1-x^2)-1}{2(1-x^2)}\right\} dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{1 - \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1-x^2)}\right\} dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\right\} dx \\
&= \pi\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \\
&= \pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) \\
&= \boldsymbol{\pi\left\{\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}-1)\right\}}
\end{aligned}
$$

……（答）