

n を 2 以上の自然数とする. さいころを n 回振り, 出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M - L$ を X とする.

- (1) $X = 1$ である確率を求めよ.
 (2) $X = 5$ である確率を求めよ.

(17 京都大 文 5)

【答】

- (1) $5 \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^n - 2 \left(\frac{1}{6} \right)^n \right\}$
 (2) $1 - 2 \left(\frac{5}{6} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n$

【解答】

- (1) $X = 1$ となるのは

$$(M, L) = (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

の 5 通りである.

$(M, L) = (2, 1)$ となるのは, n 回とも 1 または 2 の目が出る事象から n 回とも 1 のみあるいは 2 のみが出る事象を除いた事象である.

$$\begin{aligned} P((M = 2) \cap (L = 1)) &= \left(\frac{2}{6} \right)^n - \left(\frac{1}{6} \right)^n - \left(\frac{1}{6} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^n - 2 \left(\frac{1}{6} \right)^n \end{aligned}$$

残りの 4 通りも同様だから, 求める確率は

$$P(X = 1) = 5 \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^n - 2 \left(\frac{1}{6} \right)^n \right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2) $X = 5$ となるのは, $(M, L) = (6, 1)$ のときであり, n 回のうち少なくとも 1 回 6 の目が出て, かつ n 回のうち少なくとも 1 回 1 の目が出る事象である.
 余事象を考える.

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= P((M = 6) \cap (L = 1)) \\ &= 1 - P(\overline{(M = 6) \cap (L = 1)}) \\ &= 1 - P((M \neq 6) \cup (L \neq 1)) \\ &= 1 - \{P(M \neq 6) + P(L \neq 1) - P((M \neq 6) \cap (L \neq 1))\} \\ &= 1 - \left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^n + \left(\frac{5}{6} \right)^n - \left(\frac{4}{6} \right)^n \right\} \\ &= 1 - 2 \left(\frac{5}{6} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$