A，B，C，D，E，F の 6 人の学生から，それぞれのスマートフォンを 1 台ずつ回収し，その後，それらを 1 人に 1 台ずつ無作為に配布する．このとき，スマートフォンは元の持ち主の学生に戻されるとは限らないことに注意して，次の問に答えよ．

(1) A と B の 2 人がともに自分のスマートフォンを受け取れる確率は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}\boxed{3}}$ である．

(2) A と B の 2 人がともに自分のスマートフォンを受け取れない確率は $\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{5}\boxed{6}}$ である．

(3) A，B，C の 3 人がともに自分のスマートォンを受け取れない確率は $\dfrac{\boxed{7}\boxed{8}}{\boxed{9}\boxed{10}\boxed{11}}$ である．

(17 星薬大 1)

【答】

1	23	4	56	78	91011
1	30	7	10	71	120

【解答】

X が自分のスマホ (以下，スマホとする) を受け取るという事象を X とする．6 台のスマホの配布の仕方は 6!通りあり，これらは同様に確からしい．

(1) A と B は自分のスマホを受け取り，C〜F は誰のスマホを受け取ってもよいので，求める確率は

$$P(A\cap B)=\frac{4!}{6!}=\frac{1}{6\cdot 5}=\mathbf{\frac{1}{30}}$$ ……(答)

(2) A と B の 2 人がともに自分のスマホを受け取れない確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\end{aligned}$$

A が自分のスマホを受け取る確率は，$P(A)=\dfrac{1}{6}$ であり，$P(B)$ もこれと等しい．これと (1) より

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{30}\right)=1-\frac{3}{10}=\mathbf{\frac{7}{10}}$$ ……(答)

- A が B のスマホを受け取るとき
  B〜F の 5 人のスマホの受け取り方は 5! 通りある．

  A が B 以外のスマホを受け取るとき
  A の受け取り方は，A，B 以外のスマホを受け取るから 4 通り，
  この各々に対し，B の受け取り方は，A が受け取ったスマホと B のスマホ以外を受け取るから 4 通り，
  この各々に対し，C〜F の受け取り方は 4! 通りある

から，求める確率は

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{5!+4\cdot4\cdot4!}{6!}=\frac{5+16}{6\cdot5}=\frac{7}{10}$$

(3) A，B，C の 3 人がともに自分のスマホを受け取れない確率は

$$\begin{aligned}&P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\=&P(\overline{A\cup B\cup C})\\=&1-P(A\cup B\cup C)\\=&1-\{P(A)+P(B)+P(C)\\&\qquad-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)\}\end{aligned}$$

ここで

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{6}$$
$$P(A\cap B)=P(B\cap C)=P(C\cap A)=\frac{1}{30}$$
$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1\cdot1\cdot1\cdot3!}{6!}=\frac{1}{6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{120}$$

であるから，求める確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})&=1-\left(\frac{1}{6}\times3-\frac{1}{30}\times3+\frac{1}{120}\right)\\&=1-\frac{60-12+1}{120}\\&=1-\frac{49}{120}\\&=\boldsymbol{\frac{71}{120}}\end{aligned}$$

……(答)

- A，B，C が受け取るスマホ中に含まれる A，B，C のスマホの台数 s で場合分けする．
  - $s=3$ のとき
    A，B，C のスマホの受け取り方は 2 通り，この各々に対し D〜F のスマホの受け取り方は 3! 通りある．
  - $s=2$ のとき
    A，B，C が受け取るスマホ中に含まれる A，B，C のスマホの選び方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り，残り 1 つのスマホの選び方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りである．
    このとき，A，B，C のスマホの受け取り方は 3 通り，この各々に対し D〜F のスマホの受け取り方は 3! 通りある．
  - $s=1$ のとき
    A，B，C が受け取るスマホ中に含まれる A，B，C のスマホの選び方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り，残り 2 つのスマホの選び方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りである．
    このとき，A，B，C のスマホの受け取り方は 4 通り，この各々に対し D〜F のスマホの受け取り方は 3! 通りある．
  - $s=0$ のとき
    A，B，C のスマホの受け取り方は 3! 通り，この各々に対し D〜F のスマホの受け取り方は 3! 通りある．

よって，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&\frac{(2\times 3!) + {}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot(3\times 3!) + {}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot(4\times 3!) + (3!\times 3!)}{6!}\\
=&\frac{2+27+36+6}{6\cdot 5\cdot 4}\\
=&\frac{71}{120}
\end{aligned}
$$