数字の 1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 2 枚，3 が書かれたカードが 3 枚，4 が書かれたカードが 4 枚の合計 10 枚のカードが入った箱がある．この箱の中からカードを 1 枚取り出し，書かれている数字を記録して箱の中に戻すという操作を繰り返す．

(1) 操作を 2 回行ったとき，記録されている 2 つの数の和がそれら 2 つの数の積より大きくなる確率は $\boxed{(ニ)}$ である．

(2) 操作を 4 回行った時点で 1，2，3，4 の全ての数が記録されている確率は $\boxed{(ヌ)}$ である．また，操作を 4 回行った時点で記録されている数のうち最大の数が 3 である確率は $\boxed{(ネ)}$ である．

(3) 操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が 2 種類でかつそのうちの 1 つが 1 である確率は $\boxed{(ノ)}$ である．また，操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が 2 種類であったとき，そのうちの 1 つが 1 である条件付き確率を p_n とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(p_n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{(ハ)}$ が成り立つ．

(4) 操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で 1 と 4 の両方の数が記録されていて，かつ 1 が 4 より先に記録されている確率は $\boxed{(ヒ)}$ である．

(17 年 慶應大 理工 4)

(ニ)	(ヌ)	(ネ)	(ノ)	(ハ)	(ヒ)
$\frac{19}{100}$	$\frac{36}{625}$	$\frac{243}{2000}$	$\frac{1}{2^n} - \frac{3}{10^n} - \frac{1}{5^n}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

【チェック・チェック】

(1)〜(4) は独立した問題です．(1) は確率の基本問題．(2) の最大数の処理は経験しておくべき問題．(3) で条件付き確率および極限．計算が少々煩雑です．(4) はまだ計算が続くといった感じです．漸化式の利用も考えられますが，この解法の選択は少ないでしょう．

【解答】

(1) 1 回目，2 回目の操作で記録された数をそれぞれ x，y とすると

$$x + y > xy$$
$$(x-1)(y-1) < 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

← 2 次の不等式を満たす整数解．

x，y は 1，2，3，4 のいずれかであるから，①を満たすのは

$$x - 1 = 0 \text{ または } y - 1 = 0$$

すなわち

$$x = 1 \text{ または } y = 1$$

のときである．1 回目，2 回目の操作で 1 が記録されるという事象をそれぞれ X_1，Y_1 とすると，求める確率は

$$\begin{aligned} P(X_1 \cup Y_1) &= P(X_1) + P(Y_1) - P(X_1 \cap Y_1) \\ &= \frac{1}{10}\cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} \\ &= \boxed{\mathbf{\frac{19}{100}}} \qquad \cdots\cdots \text{((ニ) の答)} \end{aligned}$$

← 加法定理

である．

- 余事象を考えてもよい．1 以外の数が記録される確率は

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{81}{100}$$ であるから

$$1-\frac{81}{100}=\frac{19}{100}$$

(2) 4 回の操作で 1，2，3，4 全ての数が記録されるのは，各回異なる数が記録されるときであり，この確率は

$$4!\times\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}$$
$$=\frac{2^6\cdot 3^2}{2^4\cdot 5^4}=\boxed{\mathbf{\frac{36}{625}}}\quad\cdots\cdots\ ((\text{ヌ})\ \text{の答})$$

である．

← 4! は異なる 4 文字の順列の総数である．

4 回の操作で記録される数のうち最大の数を M とすると

$$P(M=3)=P(M\leqq 3)-P(M\leqq 2)$$
$$=\left(\frac{6}{10}\right)^4-\left(\frac{3}{10}\right)^4$$
$$=\frac{(6^2+3^2)(6^2-3^2)}{10^4}$$
$$=\frac{45\cdot 27}{10^4}=\boxed{\mathbf{\frac{243}{2000}}}\quad\cdots\cdots\ ((\text{ネ})\ \text{の答})$$

である．

← 最大値が 3 であるということは，「すべての数が 3 以下であり，かつ少なくとも 1 つは 3 である」ということであり，「少なくとも」は余事象で処理する．

(3) n 回の操作で記録される数が 2 種類でそのうちの 1 つが 1 であるのは，記録された数が 1 と 2，1 と 3，1 と 4 のいずれかである．この確率を q とすると

← 条件を満たすすすべてを拾い上げる．

$$q=\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^n-\left(\frac{1}{10}\right)^n-\left(\frac{2}{10}\right)^n\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{4}{10}\right)^n-\left(\frac{1}{10}\right)^n-\left(\frac{3}{10}\right)^n\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{5}{10}\right)^n-\left(\frac{1}{10}\right)^n-\left(\frac{4}{10}\right)^n\right\}$$
$$=\left(\frac{5}{10}\right)^n-3\left(\frac{1}{10}\right)^n-\left(\frac{2}{10}\right)^n$$
$$=\boxed{\boldsymbol{\frac{5^n-2^n-3}{10^n}}}\quad\cdots\cdots\ ((\text{ノ})\ \text{の答})$$

である．

また，n 回の操作で記録される数が 2 種類でそのうち 1 を含まないものは，記録された数が 2 と 3，2 と 4，3 と 4 のいずれかである．この確率を r とすると

$$r=\left\{\left(\frac{5}{10}\right)^n-\left(\frac{2}{10}\right)^n-\left(\frac{3}{10}\right)^n\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{6}{10}\right)^n-\left(\frac{2}{10}\right)^n-\left(\frac{4}{10}\right)^n\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{7}{10}\right)^n-\left(\frac{3}{10}\right)^n-\left(\frac{4}{10}\right)^n\right\}$$
$$=\left(\frac{5}{10}\right)^n+\left(\frac{6}{10}\right)^n+\left(\frac{7}{10}\right)^n$$
$$-2\left(\frac{2}{10}\right)^n-2\left(\frac{3}{10}\right)^n-2\left(\frac{4}{10}\right)^n$$
$$=\frac{5^n+6^n+7^n-2\cdot(2^n+3^n+4^n)}{10^n}$$

である．したがって

$$p_n = \frac{q}{q+r}$$ ⟵ 条件付き確率

$$= \frac{5^n-2^n-3}{(5^n-2^n-3)+\{5^n+6^n+7^n-2\cdot(2^n+3^n+4^n)\}}$$

$$= \frac{5^n-2^n-3}{7^n+6^n+2\cdot 5^n-3\cdot 2^n-2\cdot 3^n-2\cdot 4^n-3}$$

$$= \frac{5^n}{7^n}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n-\frac{3}{5^n}}{1+\left(\frac{6}{7}\right)^n+2\left(\frac{5}{7}\right)^n-3\left(\frac{2}{7}\right)^n-2\left(\frac{3}{7}\right)^n-2\left(\frac{4}{7}\right)^n-\frac{3}{7^n}}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}(p_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{5}{7}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n-\frac{3}{5^n}}{1+\left(\frac{6}{7}\right)^n+2\left(\frac{5}{7}\right)^n-3\left(\frac{2}{7}\right)^n-2\left(\frac{3}{7}\right)^n-2\left(\frac{4}{7}\right)^n-\frac{3}{7^n}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\boxed{\boldsymbol{\frac{5}{7}}}$$ …… ((ハ) の答)

である．

(4) n 回 ($n \geqq 2$) の操作で 1 と 4 の両方の数が記録されて，かつ 1 が 4 より先に記録されるのは，k 回目 ($1 \leqq k \leqq n-1$) に最初の 1 が現れるとすると

「$k-1$ 回までは 2 または 3 が記録され，k 回目は 1，この後の $n-k$ 回のうち少なくとも 1 回 4 が記録される」 ⟵ 状況を把握する．

ときである (ただし，$k=1$ のとき $k-1$ 回までの 2 または 3 が記録はなしとする)．求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{5}{10}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{10}\cdot\left\{1-\left(\frac{6}{10}\right)^{n-k}\right\} \qquad (n \geqq 2)$$

$$=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{10}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{1-\frac{5}{6}}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{3}{5}\right)^{n}$$

$$=\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{3}{5}\right)^{n}}}$$ …… ((ヒ) の答)

である．

- 求める確率を a_n ($n \geqq 2$) とし，漸化式を立てて a_n を求めることもできる．

  1 回目に記録される数が 1 であるか否かで場合分けすると

  (i) 1 回目の操作で 1 が記録され，2 回目以降に少なくとも 1 回 4 が記録される

  (ii) 1 回目の操作で 2 または 3 が記録され，2 回目以降に 1 と 4 の両方の数が記録され，かつ 1 が 4 より先に記録される

のいずれかであり，これらは排反であるから

$$a_{n+1} = \frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{6}{10}\right)^n\right\} + \frac{5}{10}a_n$$
$$= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad \cdots\cdots ②$$

$\alpha(n) = s + t\left(\frac{3}{5}\right)^n$ とおき，すべての自然数 n について

←― ②を等比数列に変形するための解法として覚えておくとよい．

$$\alpha(n+1) = \frac{1}{2}\alpha(n) + \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つような s，t を求める．

$$s + t\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{s + t\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$$
$$s + \frac{3t}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{s}{2} + \frac{1}{10} + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{10}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

両辺を比較して

$$\begin{cases} s = \dfrac{s}{2} + \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{3t}{5} = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{10} \end{cases} \qquad \therefore \quad s = \frac{1}{5},\ t = -1$$

② − ③ より

$$a_{n+1} - \alpha(n+1) = \frac{1}{2}(a_n - \alpha(n)) \qquad (n \geqq 2)$$

である．数列 $\{a_n - \alpha(n)\}$ は公比 $\frac{1}{2}$，初項 $a_2 - \alpha(2) = \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10} - \left\{\frac{1}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right\} = \frac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$a_n - \alpha(n) = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \qquad (n \geqq 2)$$
$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad (n \geqq 2)$$