下図のような 0 から 5 までの番号のついたマスを使い，A，B の 2 人が次のルールですごろくゲームを行う．

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|

最初 0 番のマスに A と B の駒（こま）がある．A と B は交互にさいころを投げるものとし，A がさいころを投げてゲームを開始する．A と B のどちらが投げたときも次のようにゲームを進める．さいころの目が偶数のときは，A の駒を 1 つ先の番号のマスに動かし，B の駒は投げる前にあったマスから動かさない．目が奇数のときは，A の駒は投げる前にあったマスから動かさず，B の駒を 1 つ先の番号のマスに動かす．駒が先に 5 番のマスに達した人が上がりとなり，その時点でゲームは終了する．

以下では，さいころを投げた回数は A と B の投げた回数の合計とする．

(1) さいころをちょうど 9 回投げたときに A が上がる確率は $\dfrac{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}{\boxed{(38)}\boxed{(39)}\boxed{(40)}}$ である．

(2) ゲームを開始してから終了するまで A と B の駒があるマスの番号の差が常に 1 以下である確率は $\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ である．

(3) ゲームを開始してからさいころを 4 回投げたときまで常に B が先行する確率は $\dfrac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$ である．ただし，B の駒があるマスの番号が A の駒があるマスの番号より大きいとき，B が先行するという．

(4) A が先に上がったとき，ゲームを開始してからさいころを 4 回投げたときまで常に B が先行していた確率は $\dfrac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}}$ である．

(17 年 慶應大 経済 3)

| (36)(37) | (38)(39)(40) | (41) | (42)(43) | (44) | (45)(46) | (47)(48) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 256 | 1 | 16 | 3 | 16 | 13 |

| (49)(50)(51) |
|---|
| 256 |

## 【チェック・チェック】

(1)，(2) は題意を把握しているかの確認であり，(3) は (4) の準備です．

(4) は条件付き確率です．樹形図を利用して条件を満たすすべての状況を把握しましょう．また，A が先に上がる確率と B が先に上がる確率は等しいのですが，これは気が付かないかもしれませんね．

【解答】

さいころを投げるとき，事象 $A$, $B$ を

$A$：偶数の目がでる

$B$：奇数の目がでる

とする．事象 $A$ のとき，A の駒は 1 つ先の番号のマスに動き，事象 $B$ のとき，B の駒は 1 つ先の番号のマスに動く．

(1) さいころをちょうど 9 回投げたときに A が上がるのは，8 回までに $A$ が 4 回，$B$ が 4 回起こり，9 回目に $A$ が起こるときであるから，求める確率は

← さいころ投げが行われるのは多くても 9 回，少なくても 5 回です．

$$
\begin{aligned}
&{}_8\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\\
=&\frac{70}{2^9}=\boxed{\frac{35}{256}} \qquad \cdots\cdots \text{((36)〜(40) の答)}
\end{aligned}
$$

である．

(2) ゲームを開始してから終了するまで A と B の駒があるマスの番号の差が常に 1 以下であるのは,「$AB$ または $BA$」を 4 回繰り返し (ここまでで 8 回さいころを投げている)，9 回目は「$A$ または $B$」が起きるときであるから，求める確率は

← 「$AB$ または $BA$」で番号の差は 0 になります．

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^4\times 1\\
=&\frac{1}{2^4}=\boxed{\frac{1}{16}} \qquad \cdots\cdots \text{((41)〜(43) の答)}
\end{aligned}
$$

である．

(3) 開始してから 4 回まで常に B が先行するのは

$$BBBB,\quad BBBA,\quad BBAB$$

のいずれかである．求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 3=\boxed{\frac{3}{16}} \qquad \cdots\cdots \text{((44)〜(46) の答)}$$

である．

(4) 事象 $X$, $Y$ を

$X$：A が先に上がる

$Y$：開始してから 4 回まで常に B が先行する

とする．このとき求める確率は

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}$$

← 条件付き確率

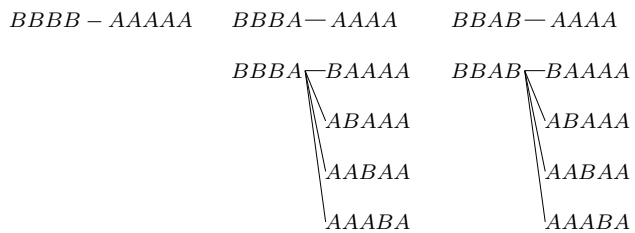
である．A が先に上がる確率と B が先に上がる確率は等しいから

← 気が付かないかもしれない．

$$P(X)=\frac{1}{2}$$

である．また $X\cap Y$ となるのは，$Y$ については (3) で考察しているので，この後のさいころ投げを樹形図にすると

← (3) がヒントになっている．樹形図を活用して A が先に上がる状況をすべて把握する．




である．したがって

$$P(X\cap Y)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^8+9\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{13}{2^9}$$

よって，求める確率は

$$P_X(Y) = \frac{\frac{13}{2^9}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{2^8} = \boxed{\frac{13}{256}} \quad \cdots\cdots \text{((47)〜(51) の答)}$$

である．