袋の中に白球が 20 個，赤球が 50 個入っている．この袋の中から球を 1 球取り出し，色を調べてから袋に戻す．これを 40 回くり返す．このとき，白球が n 回取り出される確率を p_n とする．

(1) $p_1 = \boxed{\text{コ}}\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(2) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{\boxed{\text{シ}}\left(\boxed{\text{ス}} - n\right)}{\boxed{\text{セ}}\left(n + \boxed{\text{ソ}}\right)}$ である．ただし，$\boxed{\text{セ}}$ はできるだけ小さな自然数で解答すること．

(3) 白球が取り出される確率が最大になるのは，白球が $\boxed{\text{タ}}$ 個取り出されるときである．

(17 早稲田大 スポ科 3)

【答】

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
16	40	2	40	5	1	11

【解答】

(1) 球を 1 個取り出すとき，白球，赤球が取り出される確率はそれぞれ $\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{5}{7}$ であるから

$$p_1 = {}_{40}\mathrm{C}_1 \frac{2}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^{39} = 40\frac{2\cdot 5^{39}}{7^{40}} = \boxed{\mathbf{16}}\left(\frac{5}{7}\right)^{\boxed{\mathbf{40}}} \qquad \cdots\cdots \text{(コ，サの答)}$$

(2) $p_n = {}_{40}\mathrm{C}_n \left(\dfrac{2}{7}\right)^n \left(\dfrac{5}{7}\right)^{40-n} = \dfrac{40!}{(40-n)!\,n!}\cdot\dfrac{2^n\cdot 5^{40-n}}{7^{40}}$ だから

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\dfrac{40!}{(39-n)!\,(n+1)!}\cdot\dfrac{2^{n+1}\cdot 5^{39-n}}{7^{40}}}{\dfrac{40!}{(40-n)!\,n!}\cdot\dfrac{2^n\cdot 5^{40-n}}{7^{40}}}$$

$$= \frac{(40-n)!\,n!}{(39-n)!\,(n+1)!}\cdot\frac{2}{5}$$

$$= \frac{\boxed{\mathbf{2}}\left(\boxed{\mathbf{40}} - n\right)}{\boxed{\mathbf{5}}\left(n + \boxed{\mathbf{1}}\right)} \qquad \cdots\cdots \text{(シ〜ソの答)}$$

(3) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{2(40-n)}{5(n+1)} > 1$ を解くと

$$80 - 2n > 5n + 5 \qquad \therefore\quad n < \frac{75}{7}$$

であり

$1 \leqq n \leqq 10$ のとき $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1$，すなわち $p_n < p_{n+1}$

$11 \leqq n \leqq 39$ のとき $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} < 1$，すなわち $p_n > p_{n+1}$

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_{10} < p_{11}, \quad p_{11} > p_{12} > \cdots > p_{40}$$

であるから，白球が取り出される確率が最大になるのは，白球が $\boxed{\mathbf{11}}$ 個取り出されるときである．

…… (タの答)