後期：経済学部

$\boxed{1}$ xy 平面において，原点を中心とする半径 1 の円を C とする。a と b を実数とし，放物線 $D : y = x^2 + ax + b$ の頂点 (p, q) が円 C 上にあるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $(p, q) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表すとき，a と b を θ を用いて表せ。

(2) 放物線 D の $x = 1$ における接線が円 C の周を 2 等分するような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

(3) 放物線 D の接線で円 C の周を 2 等分することを考える。そのような接線がただ 1 つ存在するような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ a を実数とする。$z = x + yi$ (x, y は実数) を複素数とし，$\overline{z} = x - yi$ とするとき，等式

$$z^3 = \overline{z} + a \qquad \cdots\cdots(*)$$

を考える。ここで i は虚数単位を表す。

(1) $a = 0$ のとき，$(*)$ を満たす z をすべて求めよ。

(2) $(*)$ を満たす z がちょうど 5 個存在するような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ n, k を $3 \leqq k < n$ を満たす整数とする。赤玉が k 個，青玉が $(n-k)$ 個入った袋から 3 個の玉を無作為に取り出したとき，取り出した玉のうち 2 個が赤玉，1 個が青玉となる確率を $p(n,k)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $p(n,k)$ を求めよ。

(2) n が 3 の倍数で 6 以上とする。n を固定して k を $3 \leqq k < n$ の範囲で動かすとき，$p(n,k)$ の最大値とそのときの k を求めよ。

$\boxed{4}$ n を負でない整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を，$n=4$ と $n=5$ のそれぞれの場合に求めよ。

(2) $2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を，n を用いて表せ。

(3) $2x+2y+z \leqq n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を，n を用いて表せ。