座標平面上に点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ をとり，関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{B}(p,\ \log_2 p)$，$\mathrm{C}(q,\ \log_2 q)$ をとる．線分 AB を $1:2$ に内分する点が C であるとき，$p$，$q$ の値を求めよう．

真数の条件により，$p > \boxed{タ}$，$q > \boxed{タ}$ である．ただし，対数 $\log_a b$ に対し，$a$ を底といい，$b$ を真数という．

線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標は，$p$ を用いて

$$\left(\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}p,\ \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\log_2 p + \boxed{ナ}\right)$$

と表される．これが C の座標と一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}p = q & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\log_2 p + \boxed{ナ} = \log_2 q & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ．

⑤は

$$p = \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}q^{\boxed{ネ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

と変形できる．④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p > \boxed{タ}$，$q > \boxed{タ}$ に注意すると

$$p = \boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハ}},\quad q = \boxed{ヒ}\sqrt{\boxed{フ}}$$

である．

また，C の $y$ 座標 $\log_2\left(\boxed{ヒ}\sqrt{\boxed{フ}}\right)$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると，$\boxed{ヘ}$ である．$\boxed{ヘ}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つ選べ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

⓪ 0.3　① 0.6　② 0.9　③ 1.3　④ 1.6　⑤ 1.9

⑥ 2.3　⑦ 2.6　⑧ 2.9　⑨ 3.3　ⓐ 3.6　ⓑ 3.9

(17 年 センター本試験 II・B 第 1 問 1［2］)

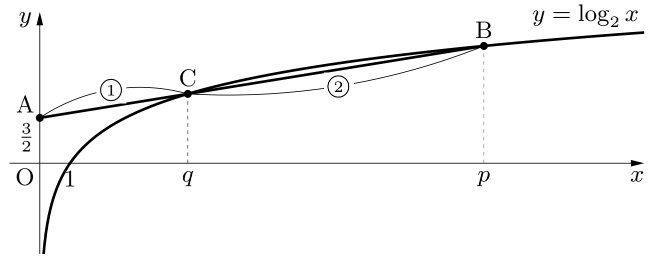
| タ | チ | ツ | テ | ト | ナ | ニ | ヌ | ネ | ノ | ハ | ヒ | フ | ヘ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 8 | 3 | 6 | 6 | 2 | 6 | 6 |

# 【チェック・チェック】

分点公式と点 C の座標により得られる連立方程式 (対数を含む) を解く問題です．対数の基本性質が理解できているかの確認問題ですが，最後の小数計算は拍子抜け．これは底の変換公式の確認ですね．

---

【解答】




B($p$，$\log_2 p$)，C($q$，$\log_2 q$) の真数の条件により

$$p > \boxed{0},\quad q>0 \qquad \cdots\cdots\ (タの答)$$

である．

　線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot p}{1+2},\ \frac{2\cdot\frac{3}{2}+1\cdot\log_2 p}{1+2}\right)$$

← 分点公式
チェクリピ 69

より

$$\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}p,\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\log_2 p+\boxed{1}\right)$$

と表される．これが C の座標 ($q$，$\log_2 q$) と一致するので

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}p=q & \cdots\cdots\ ④\\[2mm] \dfrac{1}{3}\log_2 p+1=\log_2 q & \cdots\cdots\ ⑤\end{cases}$$

が成り立つ．

　⑤を変形して

$$\begin{aligned}⑤ &\iff \log_2 p+3=3\log_2 q\\ &\iff \log_2(2^3p)=\log_2 q^3\\ &\iff 2^3p=q^3\\ \therefore\quad p&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}q^{\boxed{3}} \qquad \cdots\cdots\ ⑥ \qquad \cdots\cdots\ (ニ〜ネの答)\end{aligned}$$

← 対数の性質
チェクリピ 198〜200

④と⑥を連立させた方程式を解くと

$$p=\frac{1}{8}\left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad p^2=(2\cdot 3)^3$$

$$\therefore\quad p=\boxed{6}\sqrt{\boxed{6}}\quad(>0) \qquad \cdots\cdots\ (ノ，ハの答)$$

$$q=\frac{1}{3}p=\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}} \qquad \cdots\cdots\ (ヒ，フの答)$$

である．

また，C の $y$ 座標 $\log_2\left(2\sqrt{6}\right)$ の値は

$$\begin{aligned}\log_2\left(2\sqrt{6}\right) &= \log_2(2^{\frac{3}{2}}3^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_2 3 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{0.4771}{0.3010} \\ &= 1.5 + 0.792\cdots \\ &= 2.292\cdots\end{aligned}$$

←― 底の変換公式

小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると 2.3 である．

すなわち， $\boxed{\text{へ}}$ に当てはまるものは $\boxed{\mathbf{6}}$ である．　…… (への答)