連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える．ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \quad \cdots\cdots ③$$

とする．このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう．

2 倍角の公式を用いると，①から

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$$

が得られる．また，②から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{オ}}{15}$ である．

したがって，条件③を用いると

$$\cos^2\alpha = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}, \quad \cos^2\beta = \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

である．よって，②と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}, \quad \cos\beta = \frac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$$

である．

(17 年 センター本試験 II・B 第 1 問［1］)

アイ	ウエ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
17	15	4	4	5	1	3	2	5	5	−	3	3

【チェック・チェック】

三角関数を含む連立方程式の問題で，2 倍角の公式を利用します．誘導にのって進んでいけば，最後まで辿り着くでしょう．

途中，式を平方する操作があるので，この後に得られる解は必要条件となります．十分性を確認しなければなりません．

【解答】

2 倍角の公式を用いると

$$① \iff (2\cos^2\alpha - 1) + (2\cos^2\beta - 1) = \frac{4}{15}$$

$$\iff \cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{\boxed{\mathbf{17}}}{\boxed{\mathbf{15}}} \quad \cdots\cdots (アイ，ウエの答)$$

が得られる．

⟵ 2 倍角の公式
チェクリピ 139

また，②から

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\left(-\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)^2=\frac{\boxed{\mathbf{4}}}{15} \qquad \cdots\cdots\ (\text{オの答})$$

← 平方することにより必要条件になる．

である．

したがって，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ は 2 次方程式

$$t^2-\frac{17}{15}t+\frac{4}{15}=0$$

← $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha\beta=q\end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ α，β は $t^2-pt+q=0$ の解である．チェクリピ 52

の解である．解くと

$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{4}{5}\right)=0$$

$$\therefore\quad t=\frac{1}{3},\quad \frac{4}{5}$$

条件③を用いると $\cos^2\alpha \geqq \cos^2\beta$ であるから

$$\cos^2\alpha=\frac{\boxed{\mathbf{4}}}{\boxed{\mathbf{5}}},\quad \cos^2\beta=\frac{\boxed{\mathbf{1}}}{\boxed{\mathbf{3}}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{カ～ケの答})$$

である．よって，②も合わせると

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta)=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\quad \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

← 十分であることが保証された．

であり，さらに条件 $0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$\alpha<\beta$ から

$$\cos\alpha=\frac{\boxed{\mathbf{2}}\sqrt{\boxed{\mathbf{5}}}}{\boxed{\mathbf{5}}},\quad \cos\beta=\frac{\boxed{\mathbf{-}}\sqrt{\boxed{\mathbf{3}}}}{\boxed{\mathbf{3}}}$$

$\cdots\cdots$ (コ～ソの答)

である．