$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta) = 3\sin\theta - 2\cos\theta$ の最大値，最小値を求めなさい．

(17 福島大 人文社会 3(4))

【答】 最大値 $\sqrt{13}$，最小値 -2

【解答】

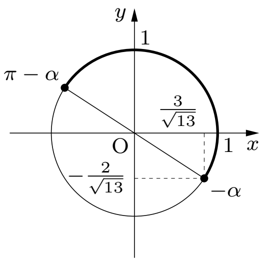
合成できるように $f(\theta)$ を変形する．

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3\sin\theta - 2\cos\theta \\ &= \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\sin\theta - \frac{2}{\sqrt{13}}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

ここで

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

となるように α を定めることができるから



$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sqrt{13}(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) \\ &= \sqrt{13}\sin(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

である．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$-\alpha \leqq \theta - \alpha \leqq \pi - \alpha$$

であり，$f(\theta)$ は $\theta - \alpha = -\alpha$，すなわち $\theta = 0$ のとき

$$\text{最小値 } \sqrt{13}\sin(-\alpha) = \sqrt{13}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \mathbf{-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとり，$\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}$，すなわち $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ のとき

$$\text{最大値 } \sqrt{13}\sin\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\sqrt{13}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．