xy 平面で，次の 2 直線を考える．

$$\ell_1 : ax - y - a = 0$$
$$\ell_2 : (a-1)x - (a+1)y + a + 1 = 0$$

a の値にかかわらず，直線 ℓ_1 は定点を通る．この点を A とする．a の値にかかわらず，直線 ℓ_2 は定点を通る．この点を B とする．また，直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 との交点を C とする．実数 a が $a > 1$ の範囲を動くとき，次の問いに答えよ．

(1) 定点 A, B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}\left(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$ と $\mathrm{B}\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ である．

(2) 直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 とのなす角を鋭角で求めると $\boxed{\text{サ}}$ 度である．

(3) 点 C が描く曲線に両端を入れて考えると，その長さは $\boxed{\text{シ}}$ である．

(4) 三角形 ABC の面積の最大値は $\boxed{\text{ス}}$ である．

(17 早稲田大 国際教養 2)

【答】

キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
1	0	0	1	45	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

【解答】

$$\ell_1 : ax - y - a = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\ell_2 : (a-1)_X - (a+1)y + a + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ①を a について整理すると

$$a(x-1) - y = 0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

であり，これが a の値にかかわらず成り立つのは

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad (x,\ y) = (1,\ 0)$$

a の値にかかわらず ℓ_1 が通る定点 A の座標は $\left(\boxed{1},\ \boxed{0}\right)$ …… (キ，クの答)

②を a について整理すると

$$a(x-y+1) - (x+y-1) = 0 \qquad \cdots\cdots ②'$$

であり，これが a の値にかかわらず成り立つのは

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad (x,\ y) = (0,\ 1)$$

a の値にかかわらず l_2 が通る定点 B の座標は $\left(\boxed{0},\ \boxed{1}\right)$ …… (ケ，コの答)

(2) $a \neq -1$ のとき ℓ_1, ℓ_2 の傾きはそれぞれ

$$a,\ \frac{a-1}{a+1}$$

である．ℓ_1, ℓ_2 が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α, β とすると

$$|\tan(\alpha-\beta)| = \left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| = \left|\frac{a-\dfrac{a-1}{a+1}}{1+a\cdot\dfrac{a-1}{a+1}}\right| = \left|\frac{a^2+1}{a^2+1}\right| = 1$$

よって，ℓ_1 と ℓ_2 のなす角 (鋭角) は 45 度である．

$a=-1$ のとき，ℓ_1, ℓ_2 はそれぞれ

$$y=-x+1,\ x=0$$

であり，このときも 2 直線のなす角は 45 度 である．

以上より，ℓ_1 と ℓ_2 のなす角 (鋭角) は $\boxed{45}$ 度である． …… (サの答)

- 2 直線のなす角 (鋭角) を θ とすると

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \left|\frac{\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a-1\\-a-1\end{pmatrix}}{\sqrt{a^2+(-1)^2}\sqrt{(a-1)^2+(-a-1)^2}}\right| \\ &= \frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{2(a^2+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって，ℓ_1 と ℓ_2 のなす角 (鋭角) は $\theta=45^\circ$ である．

(3) $a>1$ …… ③

ℓ_1 と ℓ_2 の交点 C が③の範囲で動くときの軌跡は「①かつ②かつ③」を満たす a が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$「①かつ②かつ③」\iff「①'かつ②'かつ③」$$

①$'$ に着目して $x=1$, $x\neq 1$ の場合分けをする．

(i) $x=1$ のとき

$$①' \iff a\cdot 0-y=0 \qquad \therefore\quad y=0$$

であるから

$$\begin{aligned}&「①'かつ②'かつ③」\\ \iff& \begin{cases} y=0 \\ a(1-0+1)-(1+0-1)=0 \\ a>1\end{cases} \\ \iff& \begin{cases} y=0 \\ a=0 \\ a>1\end{cases}\end{aligned}$$

これらを満たす a は存在しない．

(ii) $x\neq 1$ のとき

$$①' \iff a=\frac{y}{x-1}$$

であるから

$$「①'かつ②'かつ③」$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{y}{x-1} \\ \dfrac{y}{x-1}(x-y+1)-(x+y-1)=0 \\ a>1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{y}{x-1} \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ \dfrac{y}{x-1}>1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{y}{x-1} \\ (x-1)^2+(y-1)^2=1 \\ (x-1)(y-x+1)>0 \end{cases}$$

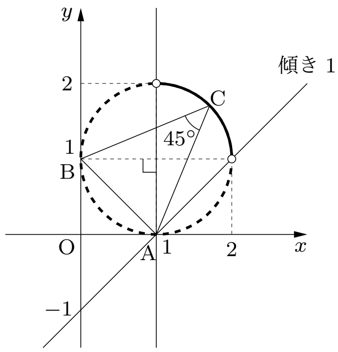
よって，C の軌跡は

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=1 \\ (x-1)(y-x+1)>0 \end{cases}$$

であり，右図の太線部分となる．

C の軌跡に両端を入れた長さは

$$\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1 = \boxed{\frac{\pi}{2}} \qquad \cdots\cdots \text{(シの答)}$$



- (2) より $\angle \mathrm{ACB}=45^\circ$ であり，C は AB を弦とする円周上にある．中心角は 90° であり，中心の座標は $(1,\ 1)$ である．さらに，$a>1$ より，右図を得る．

(4) 線分 AB を △ABC の底辺とみると，面積が最大となるのは高さが最大のときである．これは C から直線 AB に下した垂線が円の中心 $(1,\ 1)$ を通るときであり，このとき

$$(\text{高さ}) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

である．よって，△ABC の面積の最大値は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot(\text{高さ}) \\ =&\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ =&\boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \qquad \cdots\cdots \text{(スの答)} \end{aligned}$$