次の 2 つの円

$$x^2+y^2=1 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+y^2-2kx+3k=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

について，次の問に答えよ．ただし，k は定数とする．

(1) ②が円の方程式を表すための k の値の範囲を求めよ．
(2) さらに，円 ①，② が異なる 2 つの共有点をもつとき，k の値の範囲を求めよ．
(3) $k=4$ のとき，円 ①，② の共通接線の方程式をすべて求めよ．

(17 早稲田大 社会科学 3)

【答】
(1) $k<0$ または $k>3$
(2) $-1<k<-\dfrac{1}{5}$
(3) $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}(x+4)$，$y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(x-\dfrac{4}{3}\right)$

【解答】

$$x^2+y^2=1 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+y^2-2kx+3k=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ②は

$$(x-k)^2+y^2=k^2-3k$$

であるから，②が円の方程式を表す条件は

$$k^2-3k>0 \qquad \therefore \quad k(k-3)>0$$

求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k<0} \text{ または } \boldsymbol{k>3} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 円①，②が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，③のもとで

$$(\text{半径の差})<(\text{中心間の距離})<(\text{半径の和}) \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つことである．

$$\begin{aligned}
④ &\iff |\sqrt{k^2-3k}-1|<|k|<\sqrt{k^2-3k}+1\\
&\iff (\sqrt{k^2-3k}-1)^2<k^2<(\sqrt{k^2-3k}+1)^2\\
&\iff \begin{cases} k^2-3k+1-2\sqrt{k^2-3k}<k^2\\ k^2<k^2-3k+1+2\sqrt{k^2-3k}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -3k+1<2\sqrt{k^2-3k}\\ 3k-1<2\sqrt{k^2-3k}\end{cases}\\
&\iff |3k-1|<2\sqrt{k^2-3k}\\
&\iff (3k-1)^2<4(k^2-3k)
\end{aligned}$$

展開し，整理すると

$$5k^2+6k+1<0$$
$$\therefore\quad (5k+1)(k+1)<0$$
$$\therefore\quad -1<k<-\frac{1}{5}$$

これは③を満たす．

$$\boldsymbol{-1<k<-\frac{1}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- ① − ② より

$$2kx-3k=1$$

$k=0$ とすると，$0=1$ となり不合理．したがって，$k\neq 0$ であり

$$x=\frac{3k+1}{2k} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

である．③のもとで

「①かつ②」$\Longleftrightarrow$「①かつ㋐」 (加減法の原理)

であるから，円①と直線㋐が 2 点を共有する条件を求めればよい．これは

(中心と直線との距離) < (半径)

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{3k+1}{2k}\right|<1$$
$$\Longleftrightarrow (3k+1)^2<(2k)^2$$

である．式を整理すると

$$5k^2+6k+1<0$$
$$\therefore\quad (k+1)(5k+1)<0$$
$$\therefore\quad -1<k<-\frac{1}{5}$$

これは③を満たす．

- ①かつ㋐をさらに同値変形する．すなわち

「①かつ②」$\Longleftrightarrow$「①かつ㋐」 (加減法の原理)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ㋐ \\ y^2=1-\left(\dfrac{3k+1}{2k}\right)^2 \cdots\cdots ㋑ \end{cases} \qquad (\text{代入法の原理})$$

①，②が異なる 2 つの共有点をもつことは「㋐かつ㋑」を満たす実数 x, y が 2 組存在することである．㋑を満たす実数 y が 2 つ存在するような k に対して，㋐を満たす実数 x はただ 1 つ決まるから，求める条件は

$$1-\left(\frac{3k+1}{2k}\right)^2>0$$
$$\Longleftrightarrow (2k)^2-(3k+1)^2>0 \quad (\because\ k\neq 0)$$

これを整理すると

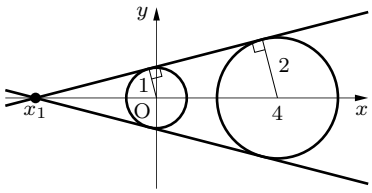
$$-1<k<-\frac{1}{5}$$

であり，これは③を満たす．

(3) $k=4$ のとき，② は

$$(x-4)^2+y^2=2^2$$

(i) 共通外接線を求める．



共通外接線と x 軸の交点の x 座標を x_1 とすると，相似条件より

$$-x_1 : (4 - x_1) = 1 : 2$$
$$\therefore \quad x_1 = -4$$

したがって，接線の方程式は

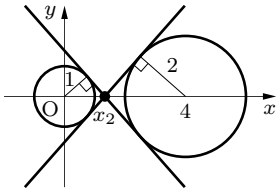
$$y = m(x + 4)$$

とおけて，原点と接線までの距離が 1 だから

$$\frac{|4m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \iff 16m^2 = m^2 + 1$$
$$\therefore \quad m = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{y = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}(x + 4)}$$

……(答)

(ii) 共通内接線を求める．



共通内接線と x 軸との交点の x 座標を x_2 とすると，相似条件より

$$x_2 : (4 - x_2) = 1 : 2$$
$$\therefore \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

したがって，接線の方程式は

$$y = m\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

とおけて，(i) と同様に考えて

$$\frac{\left|-\frac{4}{3}m\right|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \iff \frac{16}{9}m^2 = m^2 + 1$$
$$\therefore \quad m = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{y = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}\left(x - \frac{4}{3}\right)}$$

……(答)