座標平面において，点 $(-5,\ 1)$ を通る直線 $l : y = ax + b\ (b > 0)$ が円 $C : x^2 + (y-1)^2 = 9$ と異なる 2 点で交わるとき，b の値の範囲は $0 < b <$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，このとき，l と C の 2 つの交点と原点を通る円の中心が描く軌跡は直線 $y =$ $\boxed{\text{イ}}$ $x +$ $\boxed{\text{ウ}}$ の $x >$ $\boxed{\text{エ}}$ の部分である．

(17 中京大 工)

【答】

ア	イ	ウ	エ
$\frac{19}{4}$	5	5	$-\frac{12}{19}$

【解答】

$$l : y = ax + b\ (b > 0)$$
$$C : x^2 + (y-1)^2 = 9$$

$l : ax - y + b = 0$ と C が異なる 2 点で交わるための条件は

(C の中心と l の距離) $<$ (C の半径)

であり

$$\frac{|a \cdot 0 - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} < 3 \iff (b-1)^2 < 9(a^2+1)$$

l が点 $(-5,\ 1)$ を通ることより $1 = -5a + b$，すなわち $a = \dfrac{b-1}{5}$ であり

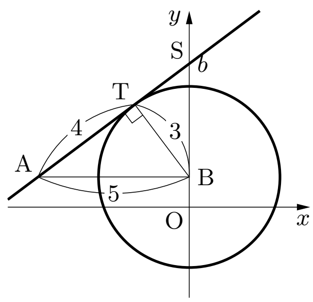
$$(b-1)^2 < 9 \cdot \frac{(b-1)^2}{25} + 9$$
$$16(b-1)^2 < 25 \cdot 9$$
$$|b-1| < \frac{15}{4}$$
$$\therefore\quad -\frac{15}{4} < b - 1 < \frac{15}{4}$$

$b > 0$ より

$$0 < b < \mathbf{\frac{19}{4}} \quad \cdots\cdots ①$$

……(答)

- 図形的に解くこともできる．
  点 $(-5,\ 1)$ を A とし，A から円 C に引いた接線のうち y 切片が正のものを考える．この接線と円との接点を T，y 軸との交点を S とすると，$\triangle\text{ABT} \backsim \triangle\text{ASB}$ であるから



$$\begin{aligned} b &= \text{OB} + \text{BS} \\ &= 1 + \text{AB} \times \frac{\text{BT}}{\text{AT}} \\ &= 1 + 5 \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{19}{4} \end{aligned}$$

よって，l と C が異なる 2 点で交わるときの b の値の範囲は

$$0 < b < \frac{19}{4}$$

次に

$$x^2+(y-1)^2-9+k(ax-y+b)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

で表される図形を考える．b が①を満たすとき，C と l は 2 つの交点で交わるから，この交点を P，Q とすると，P，Q に対して②は成り立つ．すなわち，②は 2 交点 P，Q を通る図形である．

さらに，②が原点を通るとき

$$0+(0-1)^2-9+k(0-0+b)=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{8}{b}$$

このとき，②は

$$x^2+(y-1)^2-9+\frac{8}{b}\left(\frac{b-1}{5}x-y+b\right)=0$$

$$x^2+y^2+\frac{8(b-1)}{5b}x-\left(2+\frac{8}{b}\right)y=0$$

$$\left(x+\frac{4b-4}{5b}\right)^2+\left(y-1-\frac{4}{b}\right)^2=\left(\frac{4b-4}{5b}\right)^2+\left(\frac{4}{b}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

$\left(\frac{4b-4}{5b}\right)^2+\left(\frac{4}{b}\right)^2>0$ より，③は P，Q，O を通る円である．

- ②は P，Q を通る図形であるための十分条件である．これに O を通ることが加わり，図形が円であることが確認されると，P，Q，O を通る円は一意に決まるから，③は求める円の方程式である．

円の中心を $(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x=-\dfrac{4b-4}{5b}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5b} & \cdots\cdots ④ \\ y=1+\dfrac{4}{b} & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

円の中心のが描く軌跡は「①かつ④かつ⑤」を満たす b が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$「④かつ⑤」\iff \begin{cases} \dfrac{4}{b}=5x+4 \\ y=1+(5x+4)=5x+5 \end{cases}$$

$$「①かつ④」\iff \begin{cases} 0<b<\dfrac{19}{4} \\ \dfrac{1}{b}=\dfrac{5x}{4}+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{b}>\dfrac{4}{19} \\ \dfrac{1}{b}=\dfrac{5x}{4}+1 \end{cases}$$

よって，求める軌跡は

$$\boldsymbol{y=5x+5} \text{ の } \frac{5x}{4}+1>\frac{4}{19},\ \text{すなわち } \boldsymbol{x>-\frac{12}{19}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

の部分である．