座標平面上に点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ がある．原点を中心とする半径 1 の円から点 A を除いた曲線を C とする．C 上の点 P に対し，A を始点とする半直線 AP 上に点 Q を以下の 2 つの条件 (i)，(ii) を満たすようにとる．

(i) 線分 PQ の長さは線分 BP の長さと等しい．
(ii) 点 P は線分 AQ 上にある．

点 P が C 上を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ．

(17 千葉大 後期 医・工・理 (数・情)4)

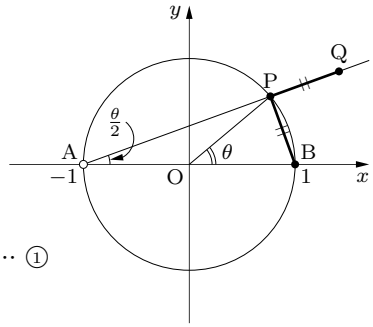
【答】 略

【解答】

点 P は曲線 C 上を動くから，点 P の座標は

$$(\cos\theta,\ \sin\theta)\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

とおくことができる．このとき，点 Q は条件 (i)，(ii) を満たすから，右図の位置にある．



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots ①$$

点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする．

(i) $0\leqq\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ $(0\leqq\theta<\pi)$ のとき

$$① \iff \begin{cases}x=\cos\theta+2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ y=\sin\theta+2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\end{cases}$$

$x,\ y$ を整理すると

$$x=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$y=\sin\theta+(1-\cos\theta)=1+\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

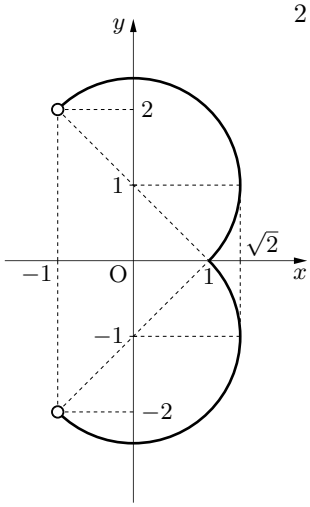
であり

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$

ここで，$0\leqq\theta<\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ である．

(ii) $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}\leqq 0$ $(-\pi<\theta\leqq 0)$ のとき

$$① \iff \begin{cases}x=\cos\theta-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ y=\sin\theta-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\end{cases}$$



$x,\ y$ を整理すると

$$x = \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y = \sin\theta - (1 - \cos\theta) = -1 + \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

であり

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

ここで，$-\pi < \theta \leqq 0$ より　$-\dfrac{3}{4}\pi < \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である．

以上 (i)，(ii) より，点 Q の軌跡は右図の 2 つの円弧である．白丸は除く．

- Q の軌跡は①を満たす θ $(-\pi < \theta < \pi)$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

(i) $0 \leqq \theta < \pi$ のとき

$$① \iff \begin{cases} x = \cos\theta + \sin\theta \\ y = \sin\theta + (1 - \cos\theta) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \cos\theta + \sin\theta = x \\ \cos\theta - \sin\theta = 1 - y \end{cases}$$
$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{x - y + 1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{x + y - 1}{2}$$

したがって，求める $x,\ y$ の条件は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x - y + 1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x + y - 1}{2}\right)^2 = 1 \\ \dfrac{x + y - 1}{2} > 0 \text{ または} \begin{cases} \dfrac{x - y + 1}{2} = 1 \\ \dfrac{x + y - 1}{2} = 0 \end{cases} \end{cases}$$
$$\therefore \quad \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 2 \\ y > 1 - x \text{ または } (x,\ y) = (1,\ 0) \end{cases}$$

(ii) $-\pi < \theta \leqq 0$ のとき

$$① \iff \begin{cases} x = \cos\theta - \sin\theta \\ y = \sin\theta - (1 - \cos\theta) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \cos\theta - \sin\theta = x \\ \cos\theta + \sin\theta = 1 + y \end{cases}$$
$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{x + y + 1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{-x + y + 1}{2}$$

したがって，求める $x,\ y$ の条件は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-x+y+1}{2}\right)^2=1 \\ \dfrac{-x+y+1}{2}<0 \text{ または} \begin{cases} \dfrac{x+y+1}{2}=1 \\ \dfrac{-x+y+1}{2}=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x^2+(y+1)^2=2 \\ y<x-1 \text{ または } (x,\ y)=(1,\ 0) \end{cases}$$

以上，(i) または (ii) を図示すると【解答】の図を得る．

- 題意より Q の軌跡は x 軸に関して対称であるから (i) または (ii) の一方を考察して折り返してもよい．