放物線上の異なる 2 個の点での接線が直交しているとする．このとき，接線の交点の軌跡が直線となることを証明しなさい．

(17 埼玉大・教育・経済 4)

【答】 略

【解答】

放物線は平行移動することにより

$$y = ax^2 \ (a \neq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおくことができる．①上の点 $\mathrm{A}\left(\alpha,\ a\alpha^2\right)$ における接線の方程式は

$$y = 2a\alpha(x-\alpha) + a\alpha^2$$
$$\therefore \quad y = 2a\alpha x - a\alpha^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

A と異なる点 $\mathrm{B}\left(\beta,\ a\beta^2\right)$ における接線の方程式は

$$y = 2a\beta x - a\beta^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．

②，③が直交するとき

$$2a\alpha \cdot 2a\beta = -1 \qquad \therefore \quad \alpha\beta = -\frac{1}{4a^2} \ (\because \ a \neq 0) \qquad \cdots\cdots ④$$

②と③の交点の x 座標は

$$2a\alpha x - a\alpha^2 = 2a\beta x - a\beta^2$$
$$2a(\alpha-\beta)x = a(\alpha^2-\beta^2)$$

$a \neq 0,\ \alpha \neq \beta$ より

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

であり

$$y = 2a\alpha \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} - a\alpha^2 = a\alpha\beta$$

接線の交点の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$(X,\ Y) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right)$$
$$\therefore \quad \begin{cases} \alpha+\beta = 2X & \cdots\cdots ⑤ \\ \alpha\beta = \dfrac{Y}{a} & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

求める軌跡は，「④かつ⑤かつ⑥」を満たす異なる実数 $\alpha,\ \beta$ が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合である．

$$「④かつ⑤かつ⑥」 \iff \begin{cases} \alpha+\beta = 2X & \cdots\cdots ⑤ \\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{4a^2} & \cdots\cdots ④ \\ Y = -\dfrac{1}{4a} & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

④，⑤より $\alpha,\ \beta$ は

$$t^2 - 2Xt - \frac{1}{4a^2} = 0$$

の解である．$\alpha\beta = -\dfrac{1}{4a^2} < 0$ であり，つねに異なる 2 つの実数解 (正の解と負の解) が存在する．

よって，求める軌跡は直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ の全体である．　　…… (証明終わり)

- 放物線は平行移動することにより

$$y = ax^2\ (a \neq 0) \qquad \cdots\cdots\ ㋐$$

とおくことができる．2 本の接線の交点を $(X,\ Y)$ とおく．$(X,\ Y)$ を通る①の接線は y 軸と平行になることはないから

$$y = m(x - X) + Y \qquad \cdots\cdots\ ㋑$$

とおくことができる．㋐と㋑を連立すると

$$ax^2 = m(x - X) + Y$$
$$ax^2 - mx + mX - Y = 0 \qquad \cdots\cdots\ ㋒$$

㋐と㋑は接するから，㋒は重解をもつ．すなわち

$$m^2 - 4a(mX - Y) = 0$$
$$m^2 - 4aXm + 4aY = 0 \qquad \cdots\cdots\ ㋓$$

である．さらに 2 本の接線は直交するから㋓は異なる 2 つの実数解 $m_1,\ m_2$ をもち

$$m_1 m_2 = -1 \qquad \cdots\cdots\ ㋔$$

である．求める軌跡は「㋓かつ㋔」を満たす異なる 2 つの実数解 $m_1,\ m_2$ が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合である．

解と係数の関係より，$m_1 m_2 = 4aY$ であるから

$$「㋓かつ㋔」 \iff \begin{cases} m^2 - 4aXm - 1 = 0 \\ 4aY = -1 \end{cases}$$

$m_1 m_2 = -1 < 0$ より，つねに異なる 2 つの実数解 (正の解と負の解) が存在する．

よって，求める軌跡は直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ の全体である．

- $y = ax^2$ は $x^2 = 4 \cdot \dfrac{1}{4a} y$ より，焦点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$，準線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ の放物線であり，求めた直線は放物線の準線である．