放物線 $y=x^2$ 上に点 A，B があり，点 A の x 座標を a とし，点 B の x 座標を $a+3$ とする．また，点 A での接線と点 B での接線の交点を点 C とする．

(1) 点 C の座標を a を用いて表せ．
(2) 点 A がこの放物線上を動くとき，点 C の軌跡の方程式を求めよ．
(3) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(17 専修大)

【答】

(1) $\mathrm{C}\left(a+\dfrac{3}{2},\ a^2+3a\right)$

(2) $y=x^2-\dfrac{9}{4}$

(3) $\dfrac{27}{4}$

【解答】

(1) $$y=x^2 \quad \cdots\cdots ①$$

①上の点 $\mathrm{A}\left(a,\ a^2\right)$ における接線の方程式は

$$y=2a(x-a)+a^2$$
$$\therefore\quad y=2ax-a^2 \quad \cdots\cdots ②$$

$\mathrm{B}\left(a+3,\ (a+3)^2\right)$ における接線は

$$y=2(a+3)x-(a+3)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③の交点の x 座標は

$$2(a+3)x-(a+3)^2=2ax-a^2$$
$$6x=6a+9$$
$$\therefore\quad x=a+\frac{3}{2}$$

②に代入して

$$y=2a\left(a+\frac{3}{2}\right)-a^2=a^2+3a$$

よって，点 C の座標は　$\mathrm{C}\left(\boldsymbol{a+\dfrac{3}{2},\ a^2+3a}\right)$ ……(答)

(2) 点 C の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x=a+\dfrac{3}{2} \\ y=a^2+3a \end{cases} \iff \begin{cases} a=x-\dfrac{3}{2} \\ y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+3\left(x-\dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots ④$$

点 C の軌跡の方程式は，④を整理して

$$\boldsymbol{y=x^2-\frac{9}{4}}$$ ……(答)

- (1) を無視して,「②かつ③」を満たす a が存在するような x, y の条件を求めてもよい.

$$「②かつ③」\iff \begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ 0 = 6x - 6a - 9 \quad (\because\ ③ - ②) \end{cases}$$

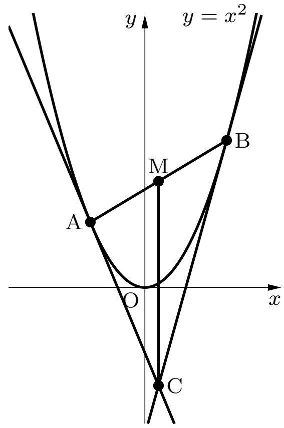
$$\iff \begin{cases} a = x - \dfrac{3}{2} \\ y = 2x\left(x - \dfrac{3}{2}\right) - \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 \end{cases}$$

よって,求める方程式は

$$y = 2x^2 - 3x - \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)$$

$$\therefore\quad y = x^2 - \frac{9}{4}$$

(3) 点 C を通る直線 $x = a + \dfrac{3}{2}$ と線分 AB の交点 M とすると,M は線分 AB の中点である.MC を △ACM と △BCM の底辺とみると,高さの和は (B の x 座標) − (A の x 座標) = 3 であるから



$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ACM} + \triangle\mathrm{BCM} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{MC} \cdot 3$$

M の y 座標は

$$\frac{a^2 + (a+3)^2}{2} = a^2 + 3a + \frac{9}{2}$$

であるから

$$\mathrm{CM} = \left(a^2 + 3a + \frac{9}{2}\right) - (a^2 + 3a) = \frac{9}{2}$$

よって

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a + \frac{3}{2} \\ a^2 + 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3a \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} a + 3 \\ (a+3)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a + \frac{3}{2} \\ a^2 + 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3a + 9 \end{pmatrix}$

 より

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left| -\frac{3}{2} \cdot (3a + 9) - \frac{3}{2} \cdot (-3a) \right| = \frac{27}{4}$$