xy 平面において，原点 O(0, 0) とは異なる点 P に対し，Q を半直線 OP 上にあって，$\mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} = 1$ を満たす点とする．また，$a > 0$ に対し，中心 $(a,\ 0)$，半径 b の円を C とする．

(1) C が原点を通るとする．P が C 上の原点とは異なる点全体を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

(2) C が原点を通らないとする．P が C 上の点全体を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

(17 愛知教大 4)

【答】

(1) 直線 : $x = \dfrac{1}{2a}$

(2) 円 : $\left(x - \dfrac{a}{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{b^2}{(a^2 - b^2)^2}$

【解答】

点 Q は O を除く半直線 OP 上にあるから，$\mathrm{OQ} \fallingdotseq 0$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathrm{OP}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\mathrm{OQ}}$$

である．さらに，$\mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} = 1$ を満たすから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{\mathrm{OQ}^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと

$$x = \frac{X}{X^2 + Y^2},\quad y = \frac{Y}{X^2 + Y^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

また，点 P は $C : (x - a)^2 + y^2 = b^2$ $\cdots\cdots$ ② 上を動くから，点 Q の軌跡は「①かつ②」を満たす点 $(x,\ y)$ が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合である．すなわち

$$\left(\frac{X}{X^2 + Y^2} - a\right)^2 + \left(\frac{Y}{X^2 + Y^2}\right)^2 = b^2$$

$$\frac{1}{X^2 + Y^2} - \frac{2aX}{X^2 + Y^2} + a^2 - b^2 = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．

(1) C は原点を通るから

$$(0 - a)^2 + 0^2 = b^2 \qquad \therefore \quad a^2 = b^2$$

このとき

$$③ \iff \frac{1 - 2aX}{X^2 + Y^2} = 0$$

$a > 0$ より

$$X = \frac{1}{2a}$$

点 Q の軌跡は直線 $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2a}}$ である． ……(答)

(2) C は原点を通らないので，$a^2 \fallingdotseq b^2$ である．

$$
\begin{aligned}
③ &\iff 1 - 2aX + (a^2 - b^2)(X^2 + Y^2) = 0 \\
&\iff \frac{1}{a^2 - b^2} - \frac{2aX}{a^2 - b^2} + X^2 + Y^2 = 0 \\
\therefore \quad & \left(X - \frac{a}{a^2 - b^2}\right)^2 + Y^2 = \frac{b^2}{(a^2 - b^2)^2}
\end{aligned}
$$

点 Q の軌跡は **中心$\left(\boldsymbol{\frac{a}{a^2 - b^2},\ 0}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{b}{|a^2 - b^2|}}$ の円** である．　……(答)

- P に対し $\mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} = (一定)$ となるように Q を対応させる変換は反転 (inversion) と呼ばれている．反転によって，原点を通る円は原点を通らない直線に，原点を通らない円は原点を通らない円にうつることが分かった．