$a,\ b$ を実数とする．等式

$$t^2+(2+i)t+2(ab-3)-(a-b-3)i=0$$

をみたす実数 t が存在するとき，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) a と b の間に成り立つ関係式を求め，それをみたす点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面に図示せよ．

(2) a と b が (1) の関係式をみたすとき，実数 t がとりうる値の範囲を求めよ．

(17 成蹊大 理工 2)

【答】

(1) $(a-2)^2+(b+2)^2=11$，図は略.

(2) $1-\sqrt{22}\leqq t\leqq 1+\sqrt{22}$

【解答】

(1) 等式

$$t^2+(2+i)t+2(ab-3)-(a-b-3)i=0$$

を i について整理すると

$$t^2+2t+2ab-6+(t-a+b+3)i=0$$

$t^2+2t+2ab-6$ と $t-a+b+3$ は実数であるから

$$\begin{cases} t^2+2t+2ab-6=0 \\ t-a+b+3=0 \end{cases}$$

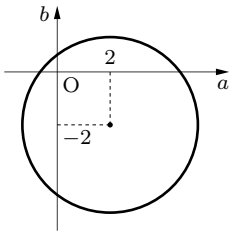
$$\iff \begin{cases} t=a-b-3 & \cdots\cdots ① \\ (a-b-3)^2+2(a-b-3)+2ab-6=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

求める a と b の関係式は②である．②を整理すると

$$(a^2+b^2+9-2ab+6b-6a)+2a-2b+2ab-12=0$$

$$\therefore\quad a^2+b^2-4a+4b=3 \qquad \cdots\cdots ②'$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(a-2)^2+(b+2)^2=11} \qquad \cdots\cdots ②'' \qquad \cdots\cdots(答)$$



よって，点 $(a,\ b)$ の軌跡は，点 $(2,\ -2)$ を中心とする半径 $\sqrt{11}$ の円であり，ab 平面に図示すると**右図**となる．

(2) a と b が (1) の関係式をみたすときの実数 t がとりうる値の範囲は,「①かつ②$'$」をみたす実数 $a,\ b$ が存在するような実数 t の値の集合である．

「①かつ②$'$」

$$\iff \begin{cases} b=a-3-t & \cdots\cdots ①' \\ a^2+(a-3-t)^2-4a+4(a-3-t)=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③をみたす実数 $a,\ t$ に対して，①$'$ により実数 b が決まるから，③をみたす実数 a が存在するような実数 t の集合が求めるものである．③を a について整理すると

$$a^2+\{a^2-2(t+3)a+(t+3)^2\}-12-4t=3$$

$$\therefore\quad 2a^2-2(t+3)a+t^2+2t-6=0$$

実数 a が存在する条件は，(判別式) $\geqq 0$ であるから

$$(t+3)^2 - 2(t^2+2t-6) \geqq 0$$

$$\therefore \quad t^2 - 2t - 21 \leqq 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{1-\sqrt{22} \leqq t \leqq 1+\sqrt{22}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 「①かつ②$'$」をみたす実数 a，b が存在するということは，ab 平面上での直線 ①：$a-b-3-t=0$ と円②$'$ が共有点をもつということである．

  直線と円が共有点をもつ条件は

  $$(\text{中心と直線との距離}) \leqq (\text{半径})$$

  であるから

  $$\frac{|2-(-2)-3-t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \leqq \sqrt{11}$$

  $$|t-1| \leqq \sqrt{22}$$

  $$1-\sqrt{22} \leqq t \leqq 1+\sqrt{22}$$