実数 $s,\ t$ に対し，xy 平面上で直交する 2 直線 $x+sy-2=0$ と $tx+y-2=0$ を考える．このとき，下の問いに答えよ．

(1) t を s の式で表せ．
(2) s の値が変化するとき，2 直線の交点の軌跡を求め，図示せよ．

(17 東京学芸大 2)

【答】
(1) $t=-s$
(2) $(x-1)^2+(y-1)^2=2,\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)$ 図は略

【解答】

(1)
$$x+sy-2=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$tx+y-2=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①と②が直交するから，法線ベクトルは垂直であり

$$\begin{pmatrix}1\\s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}=0 \qquad \therefore\quad 1\cdot t+s\cdot 1=0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{t=-s} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) (1) より，②は

$$-sx+y-2=0$$
$$\therefore\quad xs=y-2 \qquad \cdots\cdots ②'$$

2 直線①，②$'$ の交点の軌跡は,「①かつ②$'$」を満たす s が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

(i) $x=0$ のとき

$$「①かつ②'」 \iff \begin{cases}0\cdot s=y-2\\0+s\cdot y-2=0\end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases}y=2\\s=1\end{cases}$$

$s=1$ として,「①かつ②$'$」を満たす s が存在するから，点 $(0,\ 2)$ は求める軌跡上の点である．

(ii) $x\neq 0$ のとき

$$「①かつ②'」 \iff \begin{cases}s=\dfrac{y-2}{x}\\x+\dfrac{y-2}{x}\cdot y-2=0 \qquad \cdots\cdots ③\end{cases}$$

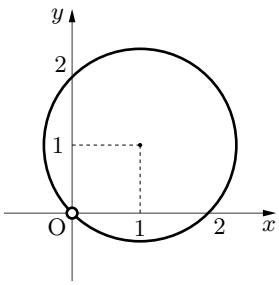
$x\neq 0$ のもとで，③は

$$x(x-2)+y(y-2)=0$$
$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-1)^2=2$$

(i)，(ii) より，求める軌跡の方程式は

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2,\quad (x,\ y)\neq(0,\ 0)$$

であり，図示すると右図となる．



- 「①かつ②′」から交点の座標を

$$\left(\frac{2(1-s)}{1+s^2},\ \frac{2(1+s)}{1+s^2}\right)$$

と s で表し，実数 s が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合を求めようとするのは少々遠回り．

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(1-s)}{1+s^2} \\ y=\dfrac{2(1+s)}{1+s^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y=\dfrac{4}{1+s^2} \\ x-y=\dfrac{-4s}{1+s^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{4}{1+s^2}=x+y \\ x-y=-s(x+y) \end{cases}$$

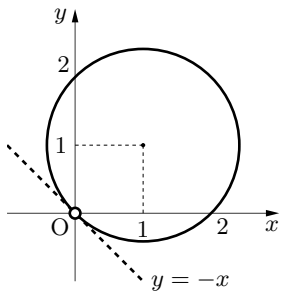
$$\iff \begin{cases} s=\dfrac{y-x}{x+y} \\ (x+y)\left\{1+\left(\dfrac{y-x}{x+y}\right)^2\right\}=4 \qquad \cdots\cdots ㋐ \end{cases}$$

求める軌跡の方程式は㋐であり，㋐を変形すると

$$㋐ \iff \begin{cases} (x+y)^2+(y-x)^2=4(x+y) \\ x+y \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)^2+(y-1^2)=2 \\ y \neq -x \end{cases}$$

であり，右図を得る．



- パラメータ s を置き換えてみよう．s は実数全体を動くから

$$s=\tan\frac{\theta}{2} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくことができる．このとき，交点 $(x,\ y)$ は

$$\begin{aligned} x&=\frac{2(1-s)}{1+s^2}=\frac{2\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=2\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} \\ &=2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)=1+\cos\theta-\sin\theta \\ &=1+\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y&=\frac{2(1+s)}{1+s^2}=\frac{2\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=2\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} \\ &=2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)=1+\cos\theta+\sin\theta \\ &=1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$-\pi < \theta < \pi$ より $-\dfrac{3}{4}\pi < \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{5}{4}\pi$ であり

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

であるから，解答の図を得る．

- 求める軌跡を

$$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta - \sin\theta \\ y = 1 + \cos\theta + \sin\theta \\ -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

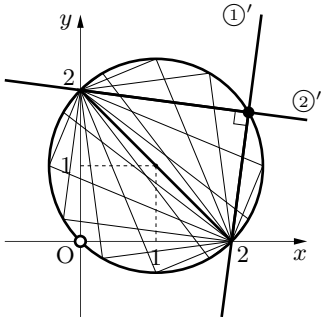
を満たす θ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合とみることもできるが，円のベクトル方程式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (-\pi < \theta < \pi)$$

と変形すると解答の図を直ちに得ることができる．

- 図形的に解くこともできる．

$$x - 2 + sy = 0 \qquad \cdots\cdots ①'$$
$$xs - y + 2 = 0 \qquad \cdots\cdots ②'$$

s の値にかかわらず，①′ は点 $(2,\ 0)$ を通る直線，②′ は点 $(0,\ 2)$ を通る直線である．さらに，①′ ⊥ ②′ であるから，2 直線 ①′，②′ の交点は，2 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を直径の両端とする円周上を動く．

ただし，s をどのようにとっても①′ は直線 $y = 0$，②′ は $x = 0$ を表すことはないから交点となる点 $(0,\ 0)$ は除く．