直線 $l : y = 2x + a$ と放物線 $C : y = x^2 - 2x + 1$ について以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) 直線 l と放物線 C が 2 つの交点を持つための a の範囲を求めよ．
(2) (1) のとき 2 つの交点の座標を求めよ．
(3) (2) で求めた 2 つの交点のうち x 座標が小さい方を A とし，大きい方を B とする．a が (1) で求めた範囲を動くとき，線分 AB を AP : PB = 1 : 2 に内分する点 P の軌跡を求めよ．

(17 東北学院大 工 7)

【答】

(1) $a > -3$
(2) $\left(2 \pm \sqrt{3+a},\ 4 + a \pm 2\sqrt{3+a}\right)$ (複号同順)
(3) $y = 9x^2 - 34x + 33\ (x < 2)$

【解答】

(1)
$$l : y = 2x + a$$
$$C : y = x^2 - 2x + 1$$

l と C が 2 つの交点を持つ条件は

$$2x + a = x^2 - 2x + 1$$
$$\therefore\quad x^2 - 4x + 1 - a = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が異なる 2 つの実数解をもつことである．すなわち，(判別式) > 0 である．

$$(-2)^2 - (1 - a) > 0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{a > -3} \qquad \cdots\cdots ②$$

……(答)

(2) $a > -3$ のとき，2 つの交点の x 座標は①の 2 つの実数解であり

$$x = 2 \pm \sqrt{3+a}$$

これを l の方程式に代入することにより，2 つの交点の y 座標は決まる．2 つの交点の座標は

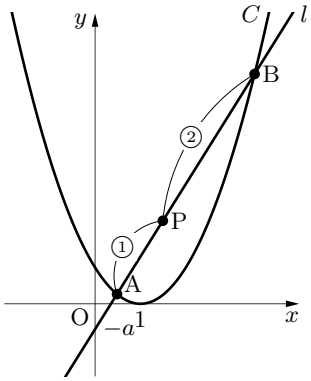
$$\boldsymbol{\left(2 \pm \sqrt{3+a},\ 4 + a \pm 2\sqrt{3+a}\right)}\ \textbf{(複号同順)}$$

……(答)

(3) A，B の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とし，P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2\alpha + \beta}{1+2}$$
$$= \frac{2(2 - \sqrt{3+a}) + (2 + \sqrt{3+a})}{3}$$
$$= \frac{6 - \sqrt{3+a}}{3} \qquad \cdots\cdots ③$$
$$y = 2x + a \qquad \cdots\cdots ④$$

P の軌跡は「②かつ③かつ④」を満たす a が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．



③を同値変形すると

$$
\begin{aligned}
③ &\iff \sqrt{3+a} = 6-3x \\
&\iff \begin{cases} 3+a = (6-3x)^2 \\ 6-3x \geqq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 9x^2 - 36x + 33 \\ x \leqq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&「②かつ③かつ④」 \\
\iff &\begin{cases} a > -3 \\ a = 9x^2 - 36x + 33 \\ x \leqq 2 \\ y = 2x + a \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a = 9x^2 - 36x + 33 \\ 9(x-2)^2 > 0 \\ x \leqq 2 \\ y = 2x + (9x^2 - 36x + 33) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a = 9x^2 - 36x + 33 \\ x < 2 \\ y = 9x^2 - 34x + 33 \end{cases}
\end{aligned}
$$

よって，P の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y = 9x^2 - 34x + 33 \quad (x < 2)}$ ……(答)