3 点 A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(0,\ 1)$ に対し，2 点 P$(0,\ p)$，Q$(0,\ q)$ を，$0 < p < q$ かつ線分 PQ の中点が C となるようにとる．更に，直線 AP と直線 BQ の交点を R とおく．

(1) R の座標を p で表せ．
(2) R の軌跡を図示せよ．

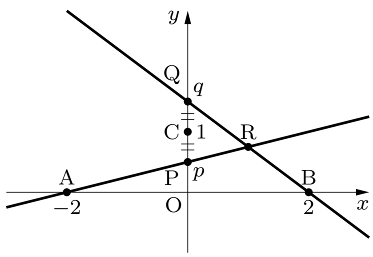
(17 法政大 法・国際文化・キャリアデザイン)

【答】

(1) $(2(1-p),\ p(2-p))$

(2) $y = -\dfrac{x^2}{4} + 1$ の $0 < x < 2$ の部分

【解答】



(1) C は線分 PQ の中点であるから

$$\frac{p+q}{2} = 1$$

すなわち

$$q = 2 - p \qquad \cdots\cdots ①$$

2 直線 AP，BQ の方程式は $0 < p < q$ ⋯⋯ ② より

$$\text{AP}: \frac{x}{-2} + \frac{y}{p} = 1 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\text{BQ}: \frac{x}{2} + \frac{y}{q} = 1 \qquad \cdots\cdots ④$$

であり，③，④より

$$x = \frac{-2(p-q)}{p+q}, \quad y = \frac{2pq}{p+q}$$

である．①を代入すると

$$x = \frac{-2(p-(2-p))}{2} = 2(1-p), \quad y = \frac{2p(2-p)}{2} = p(2-p)$$

よって，R の座標は $\boldsymbol{(2(1-p),\ p(2-p))}$ である． ⋯⋯(答)

(2) R$(x,\ y)$ とおくと，(1) から

$$\begin{cases} x = 2(1-p) & \cdots\cdots ⑤ \\ y = p(2-p) & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

である．また，①，②から

$$0 < p < 2 - p$$

すなわち

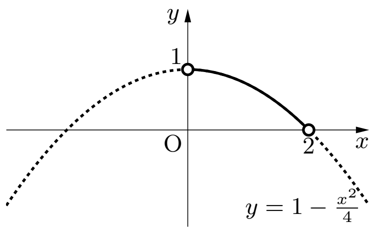
$$0 < p < 1 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

R の軌跡は「⑤かつ⑥かつ⑦」を満たす p が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

「⑤かつ⑥かつ⑦」

$$\iff \begin{cases} p = 1 - \dfrac{x}{2} \\ y = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)\left\{2 - \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)\right\} \\ 0 < 1 - \dfrac{x}{2} < 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p = 1 - \dfrac{x}{2} \\ y = 1 - \dfrac{x^2}{4} \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$



よって，点 R の軌跡は放物線

$$\boldsymbol{y = 1 - \dfrac{x^2}{4}} \ \textbf{の}\ \boldsymbol{0 < x < 2}\ \textbf{の部分}$$

である． ……(答)

- (1) の設問を無視して R の座標を p で表わさずに R の軌跡を求めることもできる．

  R の軌跡は「①かつ②かつ③かつ④」を満たす $p,\ q$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

「①かつ②かつ③かつ④」

$$\iff \begin{cases} q = 2 - p & \cdots\cdots ① \\ 0 < p < 2 - p & \cdots\cdots ②' \\ y = \left(1 + \dfrac{x}{2}\right) p & \cdots\cdots ③' \\ y = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) q & \cdots\cdots ④' \end{cases}$$

③$'$ において，$x = -2$ とすると $y = 0$ であり，このとき，④$'$ は $0 = 2q$ となり，$q = 0$ であり，①に代入すると $p = 2$ である．これは⑥に反する．したがって，$x \neq -2$ である．

同じく，④$'$ において，$x = 2$ とすると $y = 0$ であり，このとき，③$'$ は $0 = 2p$ となり，$p = 0$ である．これも⑥に反する．したがって，$x \neq 2$ である．

これより

「①かつ②かつ③かつ④」

$$\iff \begin{cases} p + q = 2 & \cdots\cdots ①' \\ 0 < p < 1 & \cdots\cdots ②'' \\ p = \dfrac{2y}{2+x} & \cdots\cdots ③'' \\ q = \dfrac{2y}{2-x} & \cdots\cdots ④'' \end{cases} \iff \begin{cases} p = \dfrac{2y}{2+x} \\ q = \dfrac{2y}{2-x} \\ \dfrac{2y}{2+x} + \dfrac{2y}{2-x} = 2 \\ 0 < \dfrac{2y}{2+x} < 1 \end{cases}$$

$x \neq \pm 2$ より

$$\frac{2y}{2+x} + \frac{2y}{2-x} = 2 \iff y\{(2-x) + (2+x)\} = 4 - x^2$$

$$\therefore \quad y = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

また

$$
\begin{aligned}
&0 < \frac{2y}{2+x} < 1 \\
\iff &\begin{cases} 2+x > 0 \\ 0 < 2y < 2+x \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 2+x < 0 \\ 0 > 2y > 2+x \end{cases}
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{cases} x > -2 \\ 0 < y < \dfrac{x}{2}+1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x < -2 \\ 0 > y > \dfrac{x}{2}+1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ⑧
$$

「⑦かつ⑧」が求める軌跡であり，下図の太線部分である．