2 次関数 $f(x) = x^2$ に対して，放物線 C を $y = f(x)$ とする．C 上の 2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ $(\alpha < \beta)$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 とし，2 直線 l_1 と l_2 の交点を R とするとき，次の問いに答えよ．

(1) l_1, l_2 の方程式および点 R の座標を α, β を用いて表せ．

(2) 線分 PQ と放物線 C が囲む部分の面積を S とする．2 点 P，Q が $S = \dfrac{9}{2}$ をみたしながら C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．

(17 福岡大 文系・薬・看 3)

【答】

(1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

(2) $y = x^2 - \dfrac{9}{4}$

【解答】

(1) $$C : y = f(x) = x^2$$

C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線 l_1 の方程式は

$$y = 2\alpha(x-\alpha) + \alpha^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y = 2\alpha x - \alpha^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

C 上の点 $\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ における接線 l_2 の方程式は

$$\boldsymbol{y = 2\beta x - \beta^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

l_1 と l_2 の交点 R の x 座標は

$$2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2$$

$$2(\alpha-\beta)x = \alpha^2 - \beta^2$$

の解であり，$\alpha \neq \beta$ より

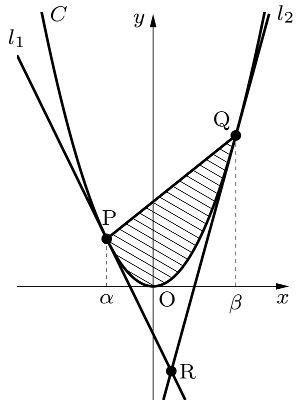
$$x = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2(\alpha-\beta)} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

である．このとき

$$y = 2\alpha\cdot\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha^2 = \alpha\beta$$

よって

$$\boldsymbol{\mathrm{R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$



(2) 線分 PQ と C が囲む部分の面積 S は，直線 PQ の方程式を $y = ax + b$ とおくと，$\alpha < \beta$ より

$$S = \int_\alpha^\beta \{(ax+b) - x^2)\}\,dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

であるから

$$S=\frac{9}{2} \iff \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{9}{2}$$

$$\therefore\quad (\beta-\alpha)^3=27 \qquad \therefore\quad \beta-\alpha=3 \qquad \cdots\cdots ①$$

R の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} & \cdots\cdots ② \\ y=\alpha\beta & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

であり，R の軌跡は「①かつ②かつ③」を満たす $\alpha,\ \beta$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

「①かつ②かつ③」

$$\iff \begin{cases} \beta-\alpha=3 \\ \alpha+\beta=2x \\ y=\alpha\beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha=x-\dfrac{3}{2} \\ \beta=x+\dfrac{3}{2} \\ y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

R の軌跡は，放物線 $\boldsymbol{y=x^2-\frac{9}{4}}$ である． ……(答)