a を定数とし，曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を C，直線 $y=a(x+1)$ を l とする．C と l が異なる 2 点で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1) a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) C と l の 2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とするとき $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ をそれぞれ a を用いて表わせ．

(3) C と l の 2 つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を求めよ．

(17 福岡教大 中教 (数学) 2)

【答】

(1) $a<-2,\ 0<a$

(2) $\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=-2a$

(3) $y=x^2+x\ (x<-2,\ 0<x)$

【解答】

(1)
$$C: y=\frac{x^2}{2}$$
$$l: y=a(x+1)$$

C と l が異なる 2 点で交わる条件は
$$\frac{1}{2}x^2=a(x+1)$$
$$x^2-2ax-2a=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
が異なる 2 つの実数解をもつことであり，(判別式) >0 である．
$$a^2-(-2a)=a(a+2)>0$$
よって，　$\boldsymbol{a<-2,\ 0<a}$　$\cdots\cdots$ ①　　　$\cdots\cdots$(答)

(2) C と l の 2 つの交点の x 座標 $\alpha,\ \beta$ は①の解であるから，解と係数の関係より
$$\boldsymbol{\alpha+\beta=2a,\quad \alpha\beta=-2a} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) C と l の 2 つの交点の中点を $\mathrm{M}(x,\ y)$ とすると
$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} & \cdots\cdots ② \\ y=a(x+1) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

M の軌跡は「①かつ②かつ③」を満たす a が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

「①かつ②かつ③」
$$\iff \begin{cases} a<-2,\ 0<a \\ x=\dfrac{2a}{2}=a \\ y=a(x+1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=x \\ x<-2,\ 0<x \\ y=x(x+1) \end{cases}$$

よって，求める軌跡は
$$\boldsymbol{y=x^2+x\ (x<-2,\ 0<x)} \quad \cdots\cdots(答)$$
である．