k を実数とする．直線 $y=-2x+k$ と放物線 $y=-x^2$ が異なる 2 点 P，Q で交わるように k が動くとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めなさい．

(17 福島大 人文社会 3(3))

【答】 $x=1\ (y<-1)$

【解答】

$$y=-2x+k \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=-x^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②が異なる 2 点で交わる条件は

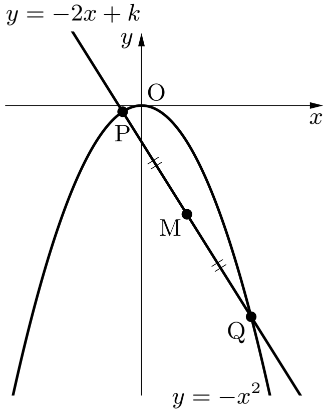
$$-2x+k=-x^2$$

$$\therefore\ x^2-2x+k=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

が異なる 2 つの実数解をもつことである．すなわち (判別式) >0 である．

$$(-1)^2-k>0$$

$$\therefore\ k<1 \qquad \cdots\cdots ④$$



2 交点 P，Q の x 座標は③の実数解 $\alpha,\ \beta$ である．線分 PQ の中点 M の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2}{2}=1 & \cdots\cdots ⑤ \\ Y=-2X+k & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

であり，M の軌跡は「④かつ⑤かつ⑥」を満たす k が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合である．

$$「④かつ⑤かつ⑥」\iff \begin{cases} k<1 \\ X=1 \\ Y=-2\cdot 1+k \end{cases} \iff \begin{cases} k=Y+2 \\ X=1 \\ Y+2<1 \end{cases}$$

よって，M の軌跡は

半直線 $\boldsymbol{x=1\ (y<-1)}$ ……(答)