放物線 $C : y = x^2 - 2(\cos\theta)x + a + \cos^2\theta$ は点 $\left(0,\ 2 + \sin\theta - \sin^2\theta\right)$ を通る．ただし，a と θ は実数である．θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で動かすとき，C の頂点の軌跡を D とする．以下の設問 (1)〜(4) に答えよ．ただし，設問 (1) は答えのみでよい．

(1) a を θ を用いて表せ．
(2) C の頂点の座標を θ を用いて表せ．
(3) D を座標平面上に図示せよ．
(4) 点 $(x,\ y)$ が D 上にあるとき，$x + y$ の値の範囲を定めよ．

(17 秋田県大 システム科技 2)

【答】

(1) $a = 1 + \sin\theta$
(2) $(\cos\theta,\ 1 + \sin\theta)$
(3) 略
(4) $0 \leqq x + y \leqq 1 + \sqrt{2}$

【解答】

(1) 放物線 C が点 $\left(0,\ 2 + \sin\theta - \sin^2\theta\right)$ を通るから

$$2 + \sin\theta - \sin^2\theta = a + \cos^2\theta$$

$$a = 2 + \sin\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a = 1 + \sin\theta} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned} y &= (x - \cos\theta)^2 + a \\ &= (x - \cos\theta)^2 + 1 + \sin\theta \end{aligned}$$

よって，頂点の座標は

$$\boldsymbol{(\cos\theta,\ 1 + \sin\theta)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) C の頂点の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x = \cos\theta & \cdots\cdots ① \\ y = 1 + \sin\theta & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ …… ③ の範囲を動くときの頂点の軌跡 D は「①かつ②かつ③」を満たす θ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

「①かつ②かつ③」

$$\iff \begin{cases} \cos\theta = x \\ \sin\theta = y - 1 \\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \end{cases}$$

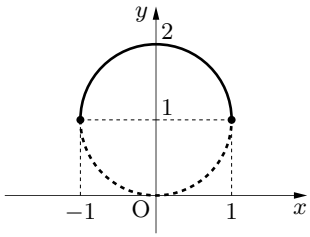
であり，これらを満たす θ が存在する条件は

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ y-1 \geqq 0 \end{cases}$$

よって，D は半円

$$x^2+(y-1)^2=1\ (y \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ④$$

であり，図示すると**右図**となる． ……(答)



(4) $x+y=k$ …… ⑤ とおく．

点 $(x,\ y)$ が D 上にあるときの $x+y$ の値の範囲とは「④かつ⑤」を満たす $x,\ y$ が存在するような k の値の範囲のことである．すなわち，直線⑤と軌跡 D が共有点をもつような k の取り得る値の範囲である．

(i) $y=-x+k$ が点 $(-1,\ 1)$ を通るとき k は最小となる．
このとき

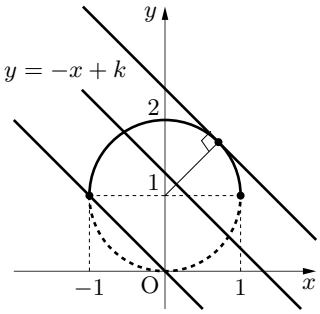
$$k=-1+1=0$$

(ii) $y=-x+k$ が D と第 1 象限で接するとき k は最大となる．
このとき，D の中心 $(0,\ 1)$ と直線 $x+y-k=0$ の距離は半径 1 と等しいから

$$\frac{|0+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$$

$$1-k=\pm\sqrt{2}$$

$$k=1\mp\sqrt{2}$$



第 1 象限で接するときの k の値は

$$k=1+\sqrt{2}$$

以上，(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{0 \leqq x+y \leqq 1+\sqrt{2}}$$ ……(答)