不等式

$$(x^2+4y+6)\left(x^2+y^2-2x+\frac{7}{8}\right) \leqq 0$$

の表す領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．
(2) $k=x+y$ とおくとき，k のとりうる値の範囲を求めよ．
(3) $x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-x-y+2$ の最大値を求めよ．

(17 兵庫県大 中期 理 4)

【答】

(1) 略
(2) $k \leqq -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{3}{2}$
(3) $\dfrac{31}{8}$

【解答】

(1) 領域 D を表す不等式は

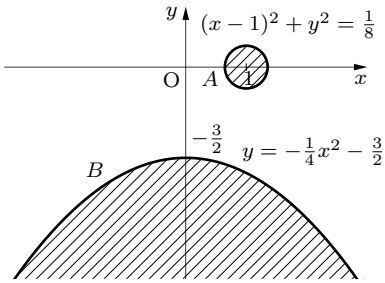
$$(x^2+4y+6)\left(x^2+y^2-2x+\frac{7}{8}\right) \leqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\iff \begin{cases} x^2+4y+6 \geqq 0 \\ x^2+y^2-2x+\dfrac{7}{8} \leqq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+4y+6 \leqq 0 \\ x^2+y^2-2x+\dfrac{7}{8} \geqq 0 \end{cases}$$

すなわち

$$A:\begin{cases} y \geqq -\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2} \\ (x-1)^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{8} \end{cases} \quad \text{または}\ B:\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2} \\ (x-1)^2+y^2 \geqq \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

であり，領域 D は**図の斜線部分 (境界も含む)** である．……(答)



(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くときの

$$k=x+y \cdots\cdots ②$$

のとりうる値の範囲は,「①かつ②」を満たす $x,\ y$ が存在するような k の値の範囲であり，これは直線②，すなわち $x+y-k=0$ と領域「A または B」が共有点をもつような k の値の範囲である．直線と領域 A が共有点をもつ条件は

$$\text{(中心と直線との距離)} \leqq \text{(半径)}$$

$$\iff \frac{|1+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leqq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$|k-1| \leqq \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} \leqq k \leqq \frac{3}{2}$$

次に，直線②と領域 B が共有点をもつ条件を求める．これは直線 $y=-x+k$ と境界の放物線 $y=-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}$ が共有点をもつことであり

$$-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}=-x+k$$

すなわち

$$x^2-4x+4k+6=0$$

が実数解をもつことである．(判別式) $\geqq 0$ を解くと

$$(-2)^2-(4k+6)\geqq 0 \qquad \therefore \quad k\leqq -\frac{1}{2}$$

よって，k のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{k\leqq -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\leqq k\leqq \frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) $$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-x-y+2=(x+y)^3-(x+y)+2$$

(2) の $k(=x+y)$ を用いると，与えられた式は k^3-k+2 である．

$f(k)=k^3-k+2$ とおくと

$$f'(k)=3k^2-1$$

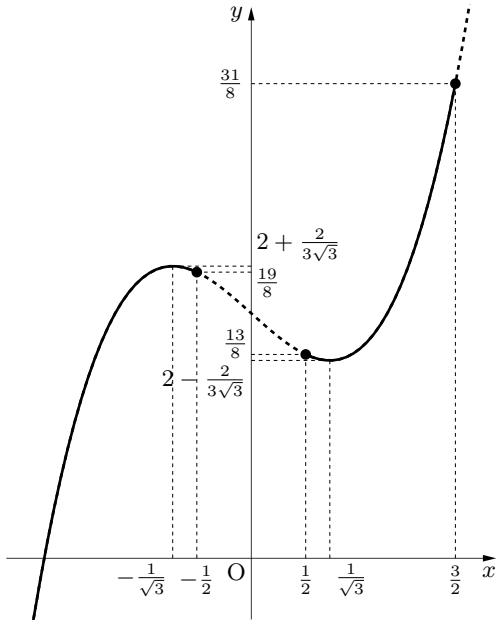
であり，$f(k)$ の増減表は次のようになる．

k	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(k)$	$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
$f(k)$	$\nearrow$		$\searrow$				$\searrow$		$\nearrow$	

ここで

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+2$$
$$=2+\frac{2}{3\sqrt{3}}$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+2=\frac{19}{8}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+2=\frac{13}{8}$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+2$$
$$=2-\frac{2}{3\sqrt{3}}$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}-\frac{3}{2}+2=\frac{31}{8}$$

より，(2) の範囲での $y=f(k)$ のグラフは右図となる．



求める最大値は

$$\boldsymbol{\frac{31}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．