a, b を実数とし，放物線 $y=(x-a)^2+b$ を Q とおく．また，直線 $y=x-1$ を l とおく．Q と l は共有点を持たないか，あるいは 1 点で接しているとする．

(1) a, b の満たす条件を求めよ．

(2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とおく．また，Q 上の点 B における Q の接線は，点 C において l と垂直に交わっているとする．このとき，3 点 A，B，C の座標を a, b を用いて表せ．

(3) a, b がさらに条件

$$a \geqq 0, \quad b \leqq 2, \quad b \leqq 2a+1$$

を満たすとき，(2) で求めた 3 点を頂点とする △ABC の面積の最大値と最小値を求めよ．

(17 北海道大 後 理・工 4)

【答】

(1) $b \geqq a-\dfrac{3}{4}$

(2) $\mathrm{A}\left(a+\dfrac{1}{2},\ b+\dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(a-\dfrac{1}{2},\ b+\dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{3}{8},\ \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{5}{8}\right)$

(3) 最大値 $\dfrac{13}{16}$，最小値 $\dfrac{1}{4}$

【解答】

$$Q : y=(x-a)^2+b$$
$$l : y=x-1$$

(1) Q と l が共有点を持たないか，あるいは 1 点で接している条件は

$$(x-a)^2+b=x-1$$
$$\therefore \quad x^2-(2a+1)x+a^2+b+1=0$$

が実数解を持たないか，あるいは重解を持つこと，すなわち，(判別式) $\leqq 0$ である．

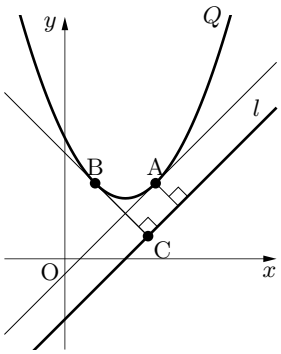
$$(2a+1)^2-4(a^2+b+1) \leqq 0$$
$$4a-4b-3 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

よって，求める a, b の条件は

$$\boldsymbol{b \geqq a-\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) Q は下に凸な放物線であるから，Q 上の点で l までの距離が最小となる点 A では，微分係数が l の傾きと一致する．



$$y'=2(x-a)$$

より

$$2(x-a)=1 \qquad \therefore \quad x=a+\frac{1}{2}$$

点 A の座標は　$\mathrm{A}\left(\boldsymbol{a+\frac{1}{2},\ b+\frac{1}{4}}\right)$ である．　……(答)

B における接線は l と垂直であるから

$$2(x-a)=-1 \qquad \therefore \quad x=a-\frac{1}{2}$$

点 B の座標は　$\mathrm{B}\left(\boldsymbol{a-\frac{1}{2},\ b+\frac{1}{4}}\right)$ である．　……(答)

点 B における接線の方程式は

$$y = -\left(x - a + \frac{1}{2}\right) + b + \frac{1}{4}$$
$$\therefore \quad y = -x + a + b - \frac{1}{4}$$

であり

$$\begin{cases} y = -x + a + b - \dfrac{1}{4} \\ y = x - 1 \end{cases}$$

を解くことにより，C の座標

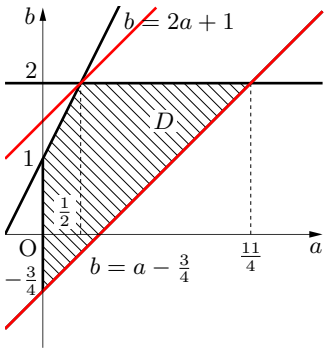
$$\mathrm{C}\left(\boldsymbol{\frac{a+b}{2} + \frac{3}{8}},\ \boldsymbol{\frac{a+b}{2} - \frac{5}{8}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が得られる．

(3) 条件

$$①,\ a \geqq 0,\ b \leqq 2,\ b \leqq 2a + 1 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

を満たす領域 D を ab 平面に図示すと右図の斜線部分となる．境界含む．



△ABC の面積を S とおく．(2) の結果より，AB // (x 軸) がわかるから，A，C の y 座標をそれぞれ y_{A}，y_{C} とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{C}}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(a + \frac{1}{2}\right) - \left(a - \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &\qquad \times \left\{\left(b + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{a+b}{2} - \frac{5}{8}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(-a + b + \frac{7}{4}\right) \qquad \cdots\cdots\ ② \end{aligned}$$

である．S の値域は $(*)$ かつ ② を満たす a, b が存在するような S の集合であるから，S の最大値，最小値は ab 平面上で領域 D と直線②が共有点を持つような S の最大値と最小値である．

②′ の傾きが 1 であることに注意すると，S は直線 ②′ が点 $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$ を通るとき最大となり，点 $\left(0,\ -\frac{3}{4}\right)$ を通るとき ($b = a - \frac{3}{4}$ と一致するとき) 最小となるから

最大値は　$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{7}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{13}{16}}$，　……(答)

最小値は　$\frac{1}{4}\left(0 - \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$　……(答)

である．