連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - 2x + 1 \\ y \leqq -x^2 + 4x + 1 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) D を座標平面上に図示せよ．

(2) a を実数とする．点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$-ax + y$ の最大値を $f(a)$ とする．$f(a)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $f(a)$ に対し，関数 $b = f(a)$ のグラフをかけ．

(17 宮崎大 教育 9)

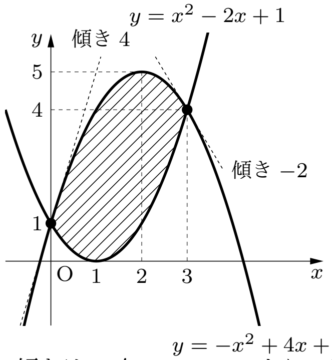
【答】

(1) 略

(2) $f(a) = \begin{cases} -3a + 4 & (a \leqq -2) \\ \dfrac{1}{4}(a-4)^2 + 1 & (-2 \leqq a \leqq 4) \\ 1 & (a \geqq 4) \end{cases}$

(3) 略

【解答】



(1)
$$y = x^2 - 2x + 1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$
$$y = -x^2 + 4x + 1 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

①と②の交点を求める．交点の x 座標は

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 4x + 1$$
$$2x^2 - 6x = 0 \qquad \therefore \quad x = 0,\ 3$$

よって，交点の座標は $(0,\ 1)$，$(3,\ 4)$ となり，D は図の斜線部分である．境界も含む．

(2) $-ax + y = k$ …… ③ とおくと，$y = ax + k$ は，傾き a，y 切片 k の直線であり，$f(a)$ は k の最大値である．

①と②における交点 $(0,\ 1)$，$(3,\ 4)$ における②の接線の傾きは，$y' = -2x + 4$ より，それぞれ 4，-2 である．

(i) $a \leqq -2$ のとき

k は，③が点 $(3,\ 4)$ を通るとき最大となる．

$$f(a) = -3a + 4$$

(ii) $-2 \leqq a \leqq 4$ のとき

k は，③が②と接するとき最大となる．

$$-x^2 + 4x + 1 = ax + k$$

$x^2 + (a-4)x + k - 1 = 0$ が重解をもつとき，すなわち (判別式) $= 0$ のとき最大となる．

$$(a-4)^2 - 4(k-1) = 0$$
$$k = \frac{1}{4}(a-4)^2 + 1$$

よって，$f(a) = \dfrac{1}{4}(a-4)^2 + 1$

(iii) $a \geqq 4$ のとき

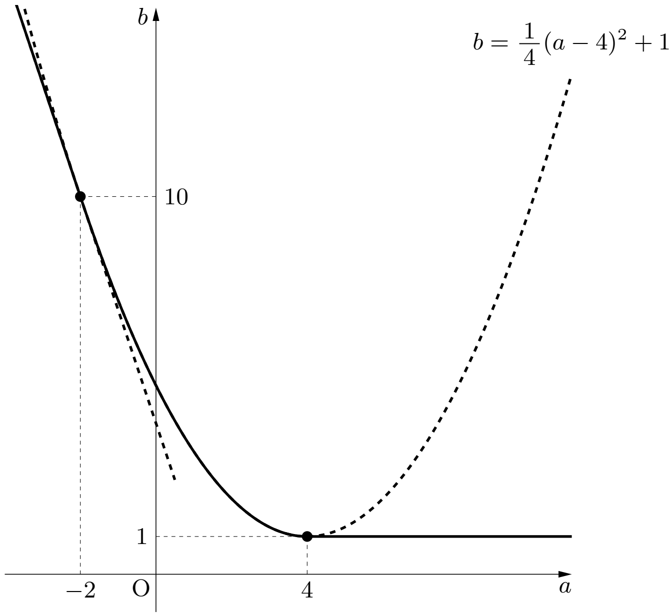
k は，③が点 $(0,\ 1)$ を通るとき最大となる．

$$f(a) = -a \cdot 0 + 1 = 1$$

以上より

$$\boldsymbol{f(a) = \begin{cases} -3a+4 & (a \leqq -2) \\ \dfrac{1}{4}(a-4)^2+1 & (-2 \leqq a \leqq 4) \\ 1 & (a \geqq 4) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) (2) で求めた $f(a)$ に対する $b = f(a)$ のグラフは下図となる．



● (2) の別解．

まず，x を固定して，y を動かす．(1) より，$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で x を固定すると

$$x^2 - 2x + 1 \leqq y \leqq -x^2 + 4x + 1$$

であるから，$-ax + y$ の最大値は

$$\begin{aligned} & -ax + (-x^2 + 4x + 1) \\ &= -x^2 + (4-a)x + 1 \\ &= -\left(x - \frac{4-a}{2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{4-a}{2}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ㋐ \end{aligned}$$

ついで，x を $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で動かす．軸 $x = \dfrac{4-a}{2}$ の位置で場合分けする．

(i) $\dfrac{4-a}{2} < 0\ (a > 4)$ のとき

㋐は，$x = 0$ で最大となるから

$$f(a) = 1$$

(ii) $0 \leqq \dfrac{4-a}{2} \leqq 3$ $(-2 \leqq a \leqq 4)$ のとき

㋐は，$x = \dfrac{4-a}{2}$ で最大となるから

$$f(a) = \frac{1}{4}(a-4)^2 + 1$$

(iii) $\dfrac{4-a}{2} > 3$ $(a < -2)$ のとき

㋐は，$x = 3$ のとき最大となるから

$$f(a) = -9 + (4-a) \cdot 3 + 1 = -3a + 4$$

以上より $$f(a) = \begin{cases} 1 & (a > 4) \\ \dfrac{1}{4}(a-4)^2 + 1 & (-2 \leqq a \leqq 4) \\ -3a + 4 & (a < -2) \end{cases}$$