座標平面上で，点 O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 0)，C(1, 1) を考える．点 P が点 B から点 C まで動くとき，正方形 AOBC の辺および内部において，線分 OP の垂直 2 等分線が通る範囲の面積を求めよ．

(17 早稲田大 教育 1(1))

---

【答】 $\dfrac{7}{24}$

---

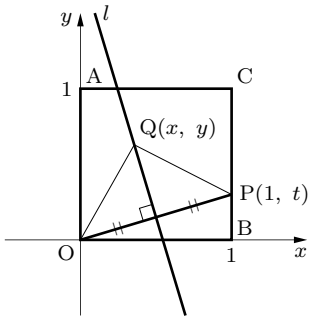
【解答】

P は線分 BC 上を動くから，P の座標は

$$(1,\ t)\ (0 \leqq t \leqq 1)$$

とおくことができる．このとき，線分 OP の垂直二等分線 $l$ の方程式は，$l$ 上の点を Q$(x,\ y)$ とおくと，OQ = QP より

$$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-t)^2$$
$$-2x - 2ty + 1 + t^2 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$




$l$ の通過領域は①を満たす $t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

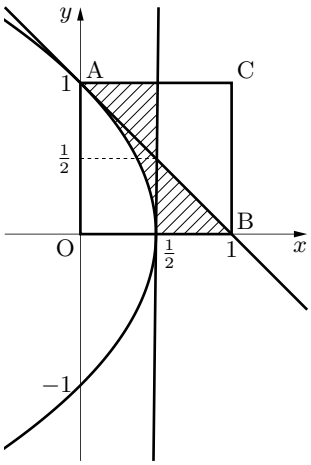
$$f(t) = t^2 - 2yt + 1 - 2x$$

とおくと，$y = f(t)$ の軸の方程式は $t = y$ である．正方形 AOBC の辺および内部での垂直二等分線上の点を考えているから $0 \leqq y \leqq 1$ としてよく，$f(t) = 0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に解をもつ条件は

$$\begin{cases} \text{判別式}: y^2 - (1-2x) \geqq 0 \\ \text{端点の符号}: f(0) \geqq 0 \text{ または } f(1) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqq \dfrac{1-y^2}{2} \\ 1-2x \geqq 0 \text{ または } 2-2y-2x \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x \geqq \dfrac{1-y^2}{2} \\ x \leqq \dfrac{1}{2} \text{ または } y \leqq 1-x \end{cases}$$




これを図示すると，右図の斜線部分となる．境界も含む．

求める面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \int_0^1 \frac{1-y^2}{2}\,dy$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{7}{24}}$$

……(答)

- 線分 OP の垂直二等分線①は，OP の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{t}{2}\right)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+t\left(y-\frac{t}{2}\right)=0 \qquad \therefore\quad x=\frac{t^2}{2}-yt+\frac{1}{2}$$

として求めてもよい．

- $x=\dfrac{t^2}{2}-yt+\dfrac{1}{2}$ とし，$y$ を固定したときの $0 \leqq t \leqq 1$ における $x$ の値域を求めてもよい．

$g(t)=\dfrac{t^2}{2}-yt+\dfrac{1}{2}$ とおくと，軸の方程式は $t=y$ である．正方形 AOBC の辺および内部での垂直二等分線上の点を考えているから $0 \leqq y \leqq 1$ としてよく，軸は $t$ の定義域内にある．したがって $x$ の値域は

$$g(y) \leqq x \leqq \max\{g(0),\ g(1)\}$$
$$\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2} \leqq x \leqq \max\left\{\frac{1}{2},\ 1-y\right\}$$

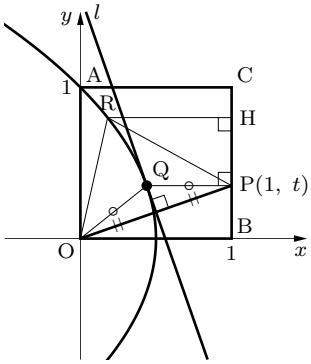
これを図示すると解答の斜線部分となる．

- $x=\dfrac{1}{2}(t-y)^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{y^2}{2}$ より，放物線 $x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{y^2}{2}$ を考える．

①と $x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{y^2}{2}$ を連立すると $t=y$ は重解となるから，①は放物線 $x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{y^2}{2}$ の点 $y=t$ における接線である．

これは次のようにして幾何的に示すこともできる．

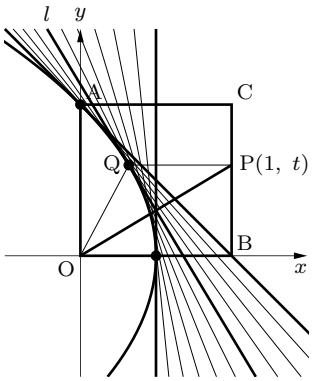
線分 OP の垂直二等分線 $l$ と P を通り BC と垂直な直線との交点を Q とすると，OQ = QP より，Q は O を焦点とし，BC を準線とする放物線上の点である．この放物線は頂点の座標 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，焦点と頂点との距離 $\dfrac{1}{2}$ であるから，放物線の方程式は




$$y^2=-4\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}$$

Q と異なる放物線上の点を R とし，R から直線 BC に下した垂線の足を H とすると

$$\mathrm{OR}=\mathrm{RH}<\mathrm{RP}$$

であり，R は $l$ 上の点ではない．すなわち，$l$ は放物線と Q のみで共有点をもつ直線であり，$l$ は放物線の接線 (放物線は $l$ の包絡線) である．

接点 Q は正方形内を動くから接線 $l$ は右図のように動く．よって，正方形 AOBC の辺および内部における $l$ の通過領域として解答の斜線部分を得る．