$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で線分 $l_t : y = t^2x - t^3$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ が動く．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 線分 $l_1$ と線分 $l_{\frac{1}{2}}$ の交点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$ である．

(2) 線分 $l_t$ 上の点 $(x,\ y)$ が動く領域 $D$ は

$$0 \leqq x \leqq \boxed{\text{オ}} \text{ のとき} \quad x - \boxed{\text{カ}} \leqq y \leqq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}} x^{\boxed{\text{コ}}}$$

$$\boxed{\text{オ}} \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ のとき} \quad \boxed{\text{ス}} \leqq y \leqq \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}} x^{\boxed{\text{チ}}}$$

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \leqq x \leqq 3 \text{ のとき} \quad \boxed{\text{ツ}} \leqq y \leqq x - \boxed{\text{テ}}$$

である．

(3) 領域 $D$ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である．

(17 東北医薬大 医 3)

---

【解答】

(1) $0 \leqq x \leqq 3$ …… ① とする．このとき

$$l_1 : y = x - 1, \quad l_{\frac{1}{2}} : y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$$

の交点の $x$ 座標は

$$x - 1 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \qquad \therefore \quad x = \frac{7}{6} \quad (\text{①を満たす})$$

したがって，線分 $l_1$ と線分 $l_{\frac{1}{2}}$ の交点の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{7}{6}},\ \boldsymbol{\frac{1}{6}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

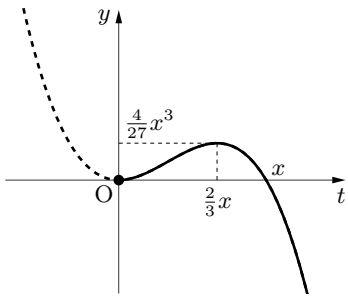
(2) $0 \leqq t \leqq 1$ …… ② のとき，線分 $l_t : y = t^2x - t^3$ が動く領域 $D$ は，まず，$x$ を①の範囲の定数として，$t$ を②の範囲で動かしたときの $y$ の値域を求め，ついで $x$ を動かすことにより得られる領域である．

$f(t) = -t^3 + xt^2$ とおくと

$$f'(t) = -3t^2 + 2xt = -t(3t - 2x)$$

$t \geqq 0$ の範囲での $f(t)$ の増減表は，次のようになる (ただし，$x > 0$ とする)．

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}x$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $(0)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{27}x^3$ | $\searrow$ |



$y=f(t)$ のグラフは右図のようになる．

$t$ は②の範囲を動くから，1 と $\dfrac{2}{3}x$ および $x$ との大小に注意しながら場合分けする．

(i) $x \leqq 1$ $(\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1})$ のとき；

$$f(1) \leqq y \leqq f\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x-1 \leqq y \leqq \frac{4}{27}x^3}$$

(ii) $\dfrac{2}{3}x \leqq 1 \leqq x$ $\left(\boldsymbol{1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}}\right)$ のとき；

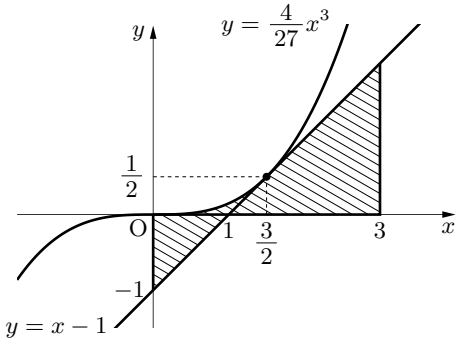
$$f(0) \leqq y \leqq f\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{0 \leqq y \leqq \frac{4}{27}x^3}$$

(iii) $1 \leqq \dfrac{2}{3}x$ $\left(\boldsymbol{\frac{3}{2} \leqq x \leqq 3}\right)$ のとき；

$$f(0) \leqq y \leqq f(1)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{0 \leqq y \leqq x-1}$$




(i)，(ii)，(iii) を図示すると右図の斜線部分となる．境界も含む．

- $y=t^2x-t^3$ …… ③ とおくと，求める領域 $D$ は「①かつ②かつ③」を満たす $t$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$③ \iff t^3-xt^2+y=0$$

$g(t)=t^3-xt^2+y$ とおくと

$$g'(t)=3t^2-2xt$$

$t \geqq 0$ の範囲での $g(t)$ の増減表は次のようになる (ただし，$x>0$ とする)．

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{2}{3}x$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(t)$ | $y$ | ↘ | $y-\frac{4}{27}x^3$ | ↗ |

$t$ の範囲②に注意すると，求める条件は

(i) $\dfrac{2}{3}x \leqq 1$ $\left(x \leqq \dfrac{3}{2}\right)$ のとき；

$$g\left(\frac{2}{3}x\right) \leqq 0 \leqq \max\{g(0),\ g(1)\}$$

$$y-\frac{4}{27}x^3 \leqq 0 \leqq \max\{y,\ y-x+1\}$$

$$\therefore \quad \min\{0,\ x-1\} \leqq y \leqq \frac{4}{27}x^3$$

(ii) $1 \leqq \dfrac{2}{3}x$ $\left(\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 3\right)$ のとき；

$$g(1) \leqq 0 \leqq g(0)$$

$$1-x+y \leqq 0 \leqq y$$

$$\therefore \quad 0 \leqq y \leqq x-1$$

(i)，(ii) を図示すると【解答】の図を得る．

- $y = xt^2 - t^3$ …… ③ を，$x$，$y$ を定数とみて $t$ で微分すると

$$0 = 2xt - 3t^2 = t(2x - 3t) \qquad \cdots\cdots ④$$

を得る．「③かつ④」を整理すると

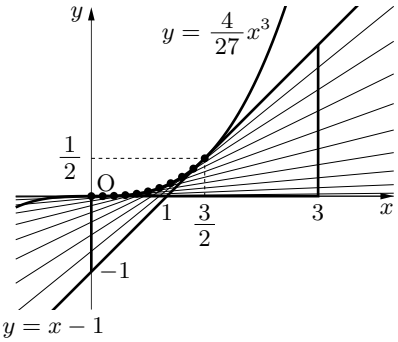
(ア) $t = 0$ のとき　　$y = 0$

(イ) $t \neq 0$ のとき

$$「③かつ④」 \iff \begin{cases} t = \dfrac{2}{3}x \\ y = x\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2 - \left(\dfrac{2}{3}x\right)^3 = \dfrac{4}{27}x^3 \end{cases}$$

(イ) より，③は $x = \dfrac{3}{2}t$ における $y = \dfrac{4}{27}x^3$ の接線である．(ア) のとき③は $y = 0$ であり，これは $x = \dfrac{3}{2} \times 0 = 0$ における $y = \dfrac{4}{27}x^3$ の接線でもある．すなわち，$0 \leqq t \leqq 1$ における③の包絡線は $y = \dfrac{4}{27}x^3$ である．$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で接線を引き $x$ を $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲に限定すると【解答】の図を得る．

  - 包絡線が存在するとき「③かつ④」により包絡線が得られるという解法は高校の範囲外であり，記述式の問題では避けた方がよい．




(3) (2) の領域 $D$ を図示すると右図のようになる．この面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(\frac{4}{27}x^3 - x + 1\right) dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{4}{27}x^3\, dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (x-1)\, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{27} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{27}\right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{\frac{3}{2}}^3 \\ &= \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{2} + 1\right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{27}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{8}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{41}{16}} \end{aligned}$$

……(答)

- 面積の求め方を工夫すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{4}{27}x^3\, dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\right) \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \left[\frac{x^4}{27}\right]_0^{\frac{3}{2}} + \frac{15}{8} \\ &= \frac{41}{16} \end{aligned}$$