放物線 $y=x^2+ax+b$ が，2 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ 1)$ を結ぶ線分と，ただ 1 つの共有点を持つような点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

(17 青山学院大 国際政経・法 3)

【答】 略

【解答】

$$y=x^2+ax+b \qquad \cdots\cdots ①$$

2 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ 1)$ を結ぶ線分の方程式は

$$y=1\ (-1 \leqq x \leqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

$$「①かつ②」 \iff \begin{cases} y=1 \\ x^2+ax+b=1 \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

$f(x)=x^2+ax+b-1$ とおくと，放物線①が線分②とただ 1 つの共有点を持つ条件を端点の符号で場合分けして求める．

(i) $f(-1)f(1)<0$ とき

$f(-1)$，$f(1)$ は異符号であり，条件を満たす．このときの a，b の条件は

$$(-a+b)(a+b)<0$$

(ii) $f(-1)f(1)=0$ とき

$f(-1)=0$，$f(1)=0$ の一方のみが成り立つことが必要である．

(ア) $f(-1)=0\ (-a+b=0)$ のとき

求める条件は　$-\dfrac{a}{2} \leqq -1$ または $f(1)<0$

すなわち　$a \geqq 2$ または $a+b<0$

$b=a$ とあわせて整理すると　$b=a\ (a \geqq 2$ または $a<0)$

(イ) $f(1)=0\ (a+b=0)$ のとき

求める条件は　$-\dfrac{a}{2} \geqq 1$ または $f(-1)<0$

すなわち　$a \leqq -2$ または $-a+b<0$

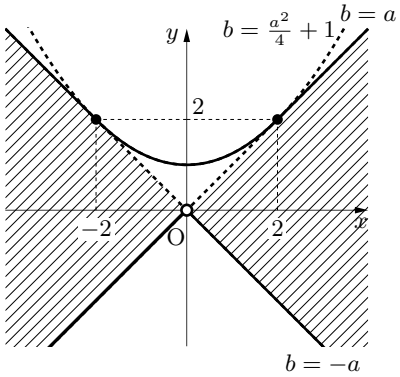
$b=-a$ とあわせて整理すると　$b=-a\ (a \leqq -2$ または $a>0)$

(iii) $f(-1)f(1)>0$ とき

$f(-1)>0$ かつ $f(1)>0$ が必要であり，判別式，軸の位置もあわせると，求める条件は

$$\begin{cases} -a+b>0 \text{ かつ } a+b>0 \\ \text{判別式}: a^2-4(b-1)=0 \\ \text{軸の位置}: -1<-\dfrac{a}{2}<1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} b>a \text{ かつ } b>-a \\ b=\dfrac{a^2}{4}+1 \\ -2<a<2 \end{cases}$$

点 $(a,\ b)$ の範囲は (i)，(ii)，(iii) の和集合であり，図示すると下図となる．境界は実線部分，黒丸は含み，破線部分，白丸は除く．



- 軸の位置で場合分けしてもよい．

(i) $-\dfrac{a}{2} < -1$ $(a > 2)$ のとき

$$\begin{cases} f(-1) \leqq 0 \\ f(1) \geqq 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} -a + b \leqq 0 \\ a + b \geqq 0 \end{cases}$$

(ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1$ $(-2 \leqq a \leqq 2)$ のとき

$$(\text{判別式}) = 0$$

$$\text{または} \begin{cases} \text{軸の位置} : -1 \leqq -\dfrac{a}{2} < 0 \\ f(-1) \leqq 0 \text{ かつ } f(1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{または} \begin{cases} \text{軸の位置} : 0 < -\dfrac{a}{2} \leqq 1 \\ f(-1) > 0 \text{ かつ } f(1) \leqq 0 \end{cases}$$

整理すると

$$b = \frac{a^2}{4} + 1 \quad \text{または} \begin{cases} 0 < a \leqq 2 \\ -a + b \leqq 0 \\ a + b > 0 \end{cases} \quad \text{または} \begin{cases} -2 \leqq a < 2 \\ -a + b > 0 \\ a + b \leqq 0 \end{cases}$$

(iii) $-\dfrac{a}{2} > 1$ $(a < -2)$ のとき

$$\begin{cases} f(-1) \geqq 0 \\ f(1) \leqq 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} -a + b \geqq 0 \\ a + b \leqq 0 \end{cases}$$

点 $(a,\ b)$ の範囲は (i)，(ii)，(iii) の和集合であり，図示すると解答の図を得る．

- $f(x) = 0$ が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつ条件から，異なる 2 つの実数解をもつ条件を除いてもよい．

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつ条件は

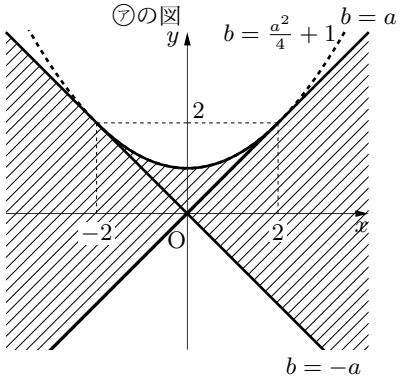
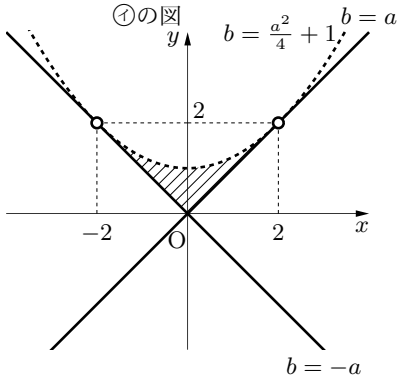
$$\text{端点の符号} : f(-1)f(1) \leqq 0 \text{ または} \begin{cases} \text{端点の符号} : f(-1) \geqq 0 \text{ かつ } f(1) \geqq 0 \\ \text{判別式} : a^2 - 4(b-1) \geqq 0 \\ \text{軸の位置} : -1 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1 \end{cases}$$

すなわち

$$(-a+b)(a+b) \leqq 0 \text{ または } \begin{cases} -a+b \geqq 0 \\ a+b \geqq 0 \\ b \leqq \dfrac{a^2}{4}+1 \\ -2 < a < 2 \end{cases} \quad \cdots\cdots ㋐$$

であり，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつ条件は

$$\begin{cases} \text{判別式}: a^2-4(b-1) > 0 \\ \text{軸の位置}: -1 < -\dfrac{a}{2} < 1 \\ \text{端点の符号}: f(-1) \geqq 0 \text{ かつ } f(1) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} b < \dfrac{a^2}{4}+1 \\ -2 < a < 2 \\ -a+b \geqq 0 \\ a+b \geqq 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots ㋑$$

㋐，㋑を図示すると下図となるから，㋐から㋑を除くことにより，解答の図を得る．