次の問いに答えよ．

(1) 座標平面の 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を焦点とし，これらの 2 点からの距離の和が 4 である点からなる楕円が以下の方程式で表されるとする．

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 1$$

このとき，定数 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ の値を求めよ．

(2) 座標平面の 4 点 $(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通る楕円を考える．この楕円の 2 つの焦点から楕円上の点までの距離の和を L とするとき，この楕円の方程式を L を用いて表せ．

(3) (2) の楕円が点 $(2,\ 0)$ を通るとき，その楕円の焦点を求めよ．

(17 お茶の水女大 後期 理 (数・情) 3)

【答】

(1) $A = \dfrac{3}{8},\ B = -\dfrac{1}{4},\ C = \dfrac{3}{8},\ D = 0,\ E = 0$

(2) $\dfrac{4}{L^2}x^2 + \dfrac{L^2-4}{L^2}y^2 = 1$，$\dfrac{L^2-4}{L^2}x^2 + \dfrac{4}{L^2}y^2 = 1$，ただし，$L \geqq 2\sqrt{2}$

(3) $\left(\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\ 0\right)$

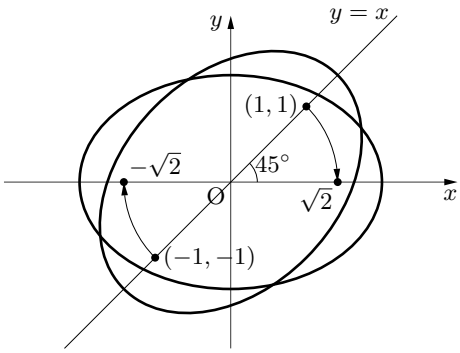
【解答】

(1) 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を焦点とする楕円を原点のまわりに -45° 回転したとき回転後の焦点の座標は

$$(\sqrt{2},\ 0),\quad (-\sqrt{2},\ 0)$$

である．回転しても長軸の長さは変わらないから 4 であり，回転後の楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = 1 \qquad \therefore\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$



①上の点 $(x,\ y)$ を原点のまわりに 45° 回転した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$X + Yi = (\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)(x + yi)$$

であり

$$\begin{aligned} x+yi &= \{\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)\}(X+Yi) \\ &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}(X+Yi) \\ &= \frac{X+Y}{\sqrt{2}}+\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

$x,\ y,\ X,\ Y$ は実数であるから

$$x=\frac{X+Y}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}$$

①に代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2=1 \\ &\frac{X^2+2XY+Y^2}{8}+\frac{X^2-2XY+Y^2}{4}=1 \\ &\frac{3}{8}X^2-\frac{1}{4}XY+\frac{3}{8}Y^2=1 \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{A=\frac{3}{8},\ B=-\frac{1}{4},\ C=\frac{3}{8},\ D=0,\ E=0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 座標平面において，楕円は一般に，方程式

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

で表される．4 点 $(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通る楕円は，周上の 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を結ぶ線分の中点 (原点) を内部に含むので，原点を通らない．したがって，$f\neq 0$ であり

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

としてよい．②が 4 点 $(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通る条件は

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=1 \\ a-b+c+d-e=1 \\ a-b+c-d+e=1 \\ a+b+c-d-e=1 \end{cases}$$

である．加減法を用いて同値変形すると

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ d+e=0 \\ a-b+c=1 \\ d-e=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+c=1 \\ b=d=e=0 \end{cases}$$

であり，求める楕円の方程式は

$$ax^2+(1-a)y^2=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．ただし，これが楕円を表すための a の範囲は

$$0<a<1$$

である．

$a \leqq 1-a$ $\left(a \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

③の焦点は x 軸上にあり，長軸の長さが $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ であるから

$$\frac{2}{\sqrt{a}} = L \qquad \therefore \quad a = \frac{4}{L^2}$$

このとき，$\dfrac{4}{L^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ により $L \geqq 2\sqrt{2}$ である．

$a \geqq 1-a$ $\left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

③の焦点は y 軸上にあり，長軸の長さが $\dfrac{2}{\sqrt{1-a}}$ であるから

$$\frac{2}{\sqrt{1-a}} = L \qquad \therefore \quad 1-a = \frac{4}{L^2} \qquad \therefore \quad a = \frac{L^2-4}{L^2}$$

このとき，$\dfrac{L^2-4}{L^2} \geqq \dfrac{1}{2}$ により $L \geqq 2\sqrt{2}$ である．

以上により，4 点 $(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通る楕円の方程式を L を用いて表すと

$$\boldsymbol{\frac{4}{L^2}x^2 + \frac{L^2-4}{L^2}y^2 = 1, \quad \frac{L^2-4}{L^2}x^2 + \frac{4}{L^2}y^2 = 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．ただし，$\boldsymbol{L \geqq 2\sqrt{2}}$ である． ……(答)

(3) ③が $(2,\ 0)$ を通るのは，

$$4a = 1 \qquad \therefore \quad a = \frac{1}{4}$$

のときである．このとき③は

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

となり，焦点の座標は

$$\left(\pm\sqrt{4-\frac{4}{3}},\ 0\right),\ \text{すなわち}\ \boldsymbol{\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3},\ 0\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$