実数 x, y が $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を満たしながら変化するとき，$x^2-\dfrac{y^2}{4}-2xy$ の最大値は $\boxed{③}$ である．

(17 関西大 全学理系 2 月 7 日 4(3))

【答】

③
$\sqrt{5}$

【解答】

実数 x, y は $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を満たすから

$$x=\cos\theta,\quad y=2\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくことができる．

$$\begin{aligned}&x^2-\frac{y^2}{4}-2xy\\=&\cos^2\theta-\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2\theta-2\cdot\cos\theta\cdot 2\sin\theta\\=&\cos 2\theta-2\sin 2\theta\\=&\sqrt{5}\cos(2\theta+\alpha)\end{aligned}$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ である．

$\alpha\leqq 2\theta+\alpha<4\pi+\alpha$ より，$-1\leqq\cos(2\theta+\alpha)\leqq 1$ であり，求める最大値は

$$\boldsymbol{\sqrt{5}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．