座標平面上に点 A(2, 0) をとり，原点 O を中心とする半径が 2 の円周上に点 B, C, D, E, F を，点 A, B, C, D, E, F が順に正六角形の頂点となるようにとる．ただし，B は第 1 象限にあるとする．

(1) 点 B の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)$，点 D の座標は $\left(-\boxed{\text{ウ}},\ 0\right)$ である．

(2) 線分 BD の中点を M とし，直線 AM と直線 CD の交点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を求めよう．

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 r, s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + r\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と 2 通りに表すことができる．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \left(-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \left(\boxed{\text{ク}},\ \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

であるから

$$r = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad s = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \left(-\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

である．

(3) 線分 BF 上に点 P をとり，その y 座標を a とする．点 P から直線 CE に引いた垂線と，点 C から直線 EP に引いた垂線との交点を H とする．

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ が

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \left(\boxed{\text{テ}},\ \boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

と表せることにより，H の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{ニ}}\,a^{\boxed{\text{ヌ}}} + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}},\ \boxed{\text{ハ}}\right)$$

である．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とする．$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，a の値は

$$a = \pm\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

である．

(17 年 センター本試験 II・B 第 4 問)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
1	3	2	5	2	3	2	1	3	4	3	2	3	4	3	2

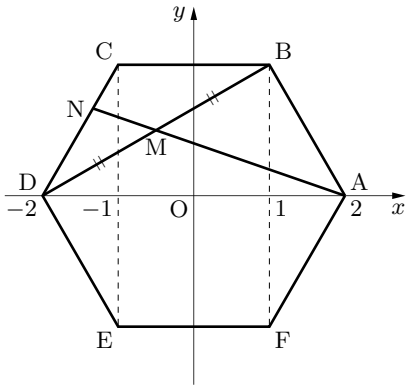
チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フヘ
3	3	2	a	3	$-$	2	1	2	a	5	12

【チェック・チェック】

N は 2 直線 AM，CD の交点であり，2 直線を表すベクトル方程式を連立することにより N を確定することができます.

2 つのベクトルのなす角については内積を利用します.

【解答】



← 図を描きながら問題文を読む.

(1) 点 B の座標は $\left(\boxed{1},\ \sqrt{\boxed{3}}\right)$, …… (ア，イの答)

点 D の座標は $\left(-\boxed{2},\ 0\right)$ …… (ウの答)

である.

← 正六角形は正三角形 6 個の寄せ集めであり，座標が計算しやすい.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 r, s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + r\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DC}} \quad \cdots\cdots ②$$

← N は直線 AM 上の点である.

← N は直線 CD 上の点である.

と 2 通りに表すことができる．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1,\ \sqrt{3}\right) + (-2,\ 0)\right\} - (2,\ 0)$$

$$= \left(-\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}},\ \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}\right) \quad \cdots\cdots \text{(エ〜キの答)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$= \left(-1,\ \sqrt{3}\right) - (-2,\ 0)$$

$$= \left(\boxed{1},\ \sqrt{\boxed{3}}\right) \quad \cdots\cdots \text{(ク，ケの答)}$$

であるから，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (2,\ 0) + r\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2 - \frac{5r}{2},\ \frac{\sqrt{3}\,r}{2}\right)$$

②より

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (-2,\ 0) + s\left(1,\ \sqrt{3}\right) = \left(-2 + s,\ \sqrt{3}\,s\right)$$

である．x 成分，y 成分を比較して

$$\begin{cases} 2 - \dfrac{5r}{2} = -2 + s \\ \dfrac{\sqrt{3}\,r}{2} = \sqrt{3}\,s \end{cases} \iff \begin{cases} 5r + 2s = 8 \\ r - 2s = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad r = \frac{\boxed{\mathbf{4}}}{\boxed{\mathbf{3}}}, \quad s = \frac{\boxed{\mathbf{2}}}{\boxed{\mathbf{3}}} \qquad \cdots\cdots \text{(コ〜スの答)}$$

である．よって

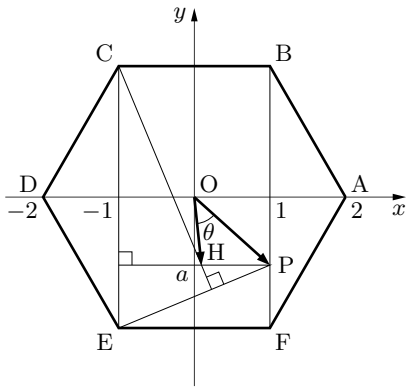
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (-2,\ 0) + \frac{2}{3}\left(1,\ \sqrt{3}\right)$$

← ②に代入したが，①に代入してもよい．

$$= \left(-\frac{\boxed{\mathbf{4}}}{\boxed{\mathbf{3}}},\ \frac{\boxed{\mathbf{2}}\sqrt{\boxed{\mathbf{3}}}}{\boxed{\mathbf{3}}}\right) \qquad \cdots\cdots \text{(セ〜ツの答)}$$

である．

(3)



← もう一度図を描き直そう．

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{EP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OE}} \\ &= (1,\ a) - \left(-1,\ -\sqrt{3}\right) \\ &= \left(\boxed{\mathbf{2}},\ \boxed{a} + \sqrt{\boxed{\mathbf{3}}}\right) \qquad \cdots\cdots \text{(テ〜ナの答)} \end{aligned}$$

と表せる．H の x 座標を x とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (x,\ a) - \left(-1,\ \sqrt{3}\right) \\ &= \left(x + 1,\ a - \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{EP}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EP}} = 0$$

$$\iff \left(x+1,\ a-\sqrt{3}\right) \cdot \left(2,\ a+\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\iff (2x+2) + (a^2-3) = 0$$

$$\therefore\quad x = \frac{-a^2+1}{2}$$

← 垂直条件を用いて，x についての方程式をつくる．

これより，H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{-}\,a^{\boxed{2}} + \boxed{1}}{\boxed{2}},\ \boxed{a}\right)$$ …… (ニ〜ハの答)

である．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|} = \frac{(1,\ a) \cdot \left(\dfrac{-a^2+1}{2},\ a\right)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{\left(\dfrac{-a^2+1}{2}\right)^2 + a^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{-a^2+1}{2} + a^2}{\sqrt{a^2+1}\,\dfrac{a^2+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

← $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}$ は大切な関係式です．

であるから

$$\cos\theta = \frac{12}{13}$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{12}{13}$$

$$\iff a^2+1 = \left(\frac{13}{12}\right)^2$$

$$\iff a = \pm\sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2 - 1}$$

$$\therefore\quad a = \pm\frac{\boxed{5}}{\boxed{12}}$$ …… (ヒ，フへの答)

である．