平面において同一直線上にない 3 点 A($\overrightarrow{a}$)，B($\overrightarrow{b}$)，C($\overrightarrow{c}$) を頂点とする三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ L，M，N とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 AM のベクトル方程式を求めよ．
(2) 3 つの直線 AM，BN，CL は 1 点で交わることを示せ．

(17 東北学院大 文系 6)

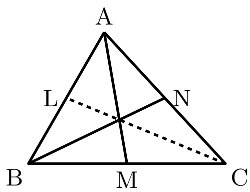
【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) 略

【解答】

(1) 直線 AM 上の点を P とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad (k \text{ は実数})$$

であり，M は辺 BC の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 扱うベクトルの始点が指定されていないので，直線のベクトル方程式をいろいろな形で表現できる．例えば，本問では三角形の 3 頂点を A($\overrightarrow{a}$)，B($\overrightarrow{b}$)，C($\overrightarrow{c}$) としているので，P($\overrightarrow{p}$) として，上式を

$$\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + \frac{k}{2}(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{p} = (1-k)\overrightarrow{a} + \frac{k}{2}\overrightarrow{b} + \frac{k}{2}\overrightarrow{c}$$

としてもよい．本解答では A を始点とした 1 次独立なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すことにした．

(2) (1) と同じようにして，直線 BN，CL のベクトル方程式を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと，直線 BN は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

直線 CL は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AL}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= \frac{1-s}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

2 直線 AM，BN の交点 P は「①かつ②」を満たす．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立だから

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} = 1 - t \\ \dfrac{k}{2} = \dfrac{t}{2} \end{cases} \quad \therefore \quad k = t = \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ④$$

2 直線 AM，CL の交点 P は「①かつ③」を満たす．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立だから

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} = \dfrac{1-s}{2} \\ \dfrac{k}{2} = s \end{cases} \quad \therefore \quad k = \frac{2}{3},\ s = \frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤において k の値が一致するから，3 直線 AM，BN，CL は 1 点で交わる．

……(証明終わり)

- ①に $k = \dfrac{2}{3}$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$$
$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{1}{3}\{(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})\}$$
$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

として重心の公式を得ることができる．