$\triangle$ABC と点 P に対し，$6\overrightarrow{\mathrm{PA}}+14\overrightarrow{\mathrm{PB}}+15\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$ が成り立つとする．また，2 点 B，P を通る直線と辺 AC との交点を D とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 長さの比 AD : CD は次のどれか．
ⓐ 3 : 1 ⓑ 4 : 1 ⓒ 5 : 2 ⓓ 7 : 2 ⓔ 7 : 3 ⓕ 8 : 3
ⓖ 以上のどれでもない．

(2) 長さの比 BP : PD は次のどれか．
ⓐ 3 : 1 ⓑ 3 : 2 ⓒ 5 : 2 ⓓ 5 : 3 ⓔ 7 : 2 ⓕ 7 : 3
ⓖ 以上のどれでもない．

(3) 面積の比 $\triangle$ABC : $\triangle$ADP は次のどれか．
ⓐ 4 : 1 ⓑ 5 : 2 ⓒ 7 : 2 ⓓ 8 : 3 ⓔ 9 : 4 ⓕ 10 : 3
ⓖ 以上のどれでもない．

(17 防衛大 理工・人文・社会 3)

【答】

(1) ⓒ
(2) ⓑ
(3) ⓒ

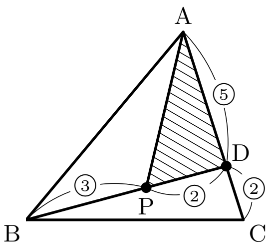
【解答】

(1) $$6\overrightarrow{\mathrm{PA}}+14\overrightarrow{\mathrm{PB}}+15\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$$

B を始点として式を整理すると

$$6(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}})-14\overrightarrow{\mathrm{BP}}+15(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}})=\overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{6\overrightarrow{\mathrm{BA}}+15\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{35}=\frac{3}{35}(2\overrightarrow{\mathrm{BA}}+5\overrightarrow{\mathrm{BC}})$$
$$=\frac{3}{5}\,\frac{2\overrightarrow{\mathrm{BA}}+5\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{7}$$



$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{BA}}+5\overline{BC}}{7}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ となり，点 Q は直線 BP 上で辺 AC 上にもあるから，交点 D と一致する．

よって AD : CD = 5 : 2 ⓒ …… (1) の答

- 与式を

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=-\frac{6\overrightarrow{\mathrm{PA}}+15\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{14}=-\frac{3}{14}(2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}})=-\frac{3}{2}\,\frac{2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{7}$$

と変形して上図を得ることもできる．

(2) (1) より $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ であるから

BP : PD = 3 : 2 ⓑ …… (2) の答

(3) (1) と (2) より

$$\triangle\mathrm{ADP} = \frac{2}{5}\triangle\mathrm{ABD} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ADP} = 7 : 2$$ ⓒ ······ (3) の答