平面上の 3 点 O，A，B について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，平面上の点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \vec{b}$ を満たすとする．さらに，$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ および $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ とする．

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2) $|\vec{a} + t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値を t_0 とし，平面上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{a} + t_0\vec{b}$ を満たすとする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であることを示せ．

(3) (2) の条件のもとで，四角形 OBPQ の面積 S を求めよ．

(17 室蘭工大 5)

【答】

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{3}{2}$，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(2) 略

(3) $S = \dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

【解答】

(1) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ より

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$$
$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$
$$1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3 = 1$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角であるから

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{2}}{1 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ を変形すると

$$\begin{aligned} |\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 1 + 3t + 3t^2 \\ &= 3\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって，$|\vec{a} + t\vec{b}|$ を最小にする t の値 t_0 は

$$t_0 = -\frac{1}{2}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{a} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}$ である．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) - \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{b}$$

であるから

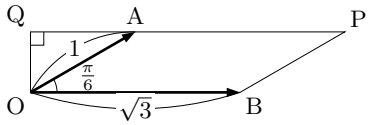
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \left(\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{b}\right) \\ &= -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \times 3 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \neq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

…… (証明終わり)

(3) PQ // OB かつ OQ ⊥ PQ より，四角形 OBPQ は右図のような台形であり，面積 S は



$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}(\mathrm{OB} + \mathrm{PQ}) \times \mathrm{OQ} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{3} + \left(\sqrt{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)\right\} \times \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{8}}\end{aligned}$$

……(答)