三角形 ABC の外接円の半径は 1 とし，中心を O とおく．正数 k は

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$$

を満たし，また，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{3}{5}$ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) このとき $k=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．また，AB の長さは $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(2) 線分 AB と線分 CP が直交するような辺 AB 上の点 P を考える．このとき $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\boxed{\text{カ}}:\boxed{\text{キ}}$ で，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である．

(17 東北医薬大 薬 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	クケ	コサ
7	5	2	5	5	7	3	21	25

【解答】

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が現れるように $3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$ を変形する．

$$4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$16|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$
$$16|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+6k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{3}{5}$ より

$$16=9+6k\times\frac{3}{5}+k^2$$
$$5k^2+18k-35=0$$
$$(5k-7)(k+5)=0$$

$k>0$ より $k=\boxed{\dfrac{7}{5}}$ …… (ア，イの答)

また

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=1-2\times\frac{3}{5}+1\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$ …… (ウ～オの答)

(2) $\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = t : 1-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

(1) より

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{7}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{7}{20}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

となるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \left(\frac{7}{4} - t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(t + \frac{7}{20}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = 0$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot \left\{\left(\frac{7}{4} - t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(t + \frac{7}{20}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} = 0$$

$$\left(t - \frac{7}{4}\right)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \left(\frac{7}{5} - 2t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left(t + \frac{7}{20}\right)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 0$$

$$\left(t - \frac{7}{4}\right) + \left(\frac{7}{5} - 2t\right) \times \frac{3}{5} + \left(t + \frac{7}{20}\right) = 0$$

$$\frac{4}{5}t - \frac{14}{25} = 0$$

$$\therefore \quad t = \frac{7}{10}$$

よって

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \frac{7}{10} : \frac{3}{10} = \boxed{7} : \boxed{3}$$ …… (カ，キの答)

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \left(\frac{7}{4} - \frac{7}{10}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{20}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{21}{20}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{21}{20}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= \left(\frac{21}{20}\right)^2 (|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2) \\ &= \left(\frac{21}{20}\right)^2 \left(1 + 2 \times \frac{3}{5} + 1\right) \\ &= \left(\frac{21}{20}\right)^2 \times \frac{16}{5}\end{aligned}$$

$$\mathrm{CP} = \frac{21}{20}\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{25}$$

したがって，三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{CP} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{21\sqrt{5}}{25} = \boxed{\frac{21}{25}}$$ …… (ク〜サの答)