原点 O を中心とする半径 1 の円周上に 3 点 A，B，C があり，$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$ をみたしている．このとき内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値は $\boxed{(1)}$ である．また，直線 AB と直線 OC の交点を D とするとき，線分 OD の長さは $\boxed{(2)}$ である．

(17 福岡大 理・工 2(1))

【答】

(1)	(2)
0	$\frac{5}{7}$

【解答】

$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が現れるように変形する．

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-5\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|-5\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+24\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+16|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=25|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ より

$$9+24\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+16=25 \qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{0}$$ …… ((1) の答)

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=-\frac{7}{5}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ …… ①

D は直線 AB と直線 OC の交点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2&=\frac{1}{49}|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=\frac{1}{49}(9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+24\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+16|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)\\&=\frac{1}{49}(9+0+16)\\&=\frac{25}{49}\end{aligned}$$

よって $\mathrm{OD}=\boxed{\frac{5}{7}}$ …… ((2) の答)

- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ および①より，3 点 A，B，C および D は下図の位置にあることが分かる．