1 辺の長さが 1 の正四面体 PABC において，辺 PA, BC, PB, AC の中点をそれぞれ K, L, M, N とする．線分 KL，MN の中点をそれぞれ Q，R とし，△ABC の重心を G とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表し，点 Q と R が一致することを示しなさい．

(2) 3 点 P，Q，G が同一直線上にあることを示しなさい．また，PQ : QG を求めなさい．

(3) PG ⊥ AB を示しなさい．

(17 大分大 理工・教育・経済 1)

【答】

(1) 略

(2) 証明は略，PQ : QG = 3 : 1

(3) 略

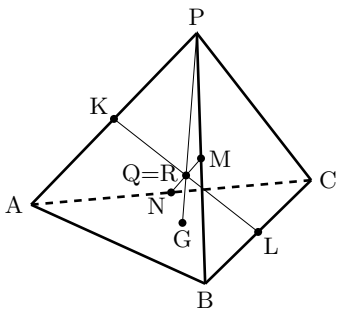
【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PK}}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PL}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PK}}+\overrightarrow{\mathrm{PL}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{PN}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ であり，点 Q と R は一致する．

…… (証明終わり)



(2) G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

よって，P，Q，G は同一直線上にある．　…… (証明終わり)

このとき，PG : PQ = 4 : 3 であるから

PQ : QG = 3 : (4 − 3) = **3 : 1**　……(答)

(3) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，同様にして，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$
であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=\frac{1}{3}(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=0\end{aligned}$$

よって，PG ⊥ AB である．　…… (証明終わり)