一辺の長さが 1 の立方体 OABC–DEFG において，線分 BF を 2 : 1 に内分する点を P，線分 EF の中点を Q とする．また，線分 OF と平面 PQG の交点を R とする．次の各問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=s\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を満たす実数 s を求めよ．

(3) △PQG の重心を S とするとき，線分 RS の長さを求めよ．

(17 鹿児島大 理・工・医・歯・教・農・獣・水産 4)

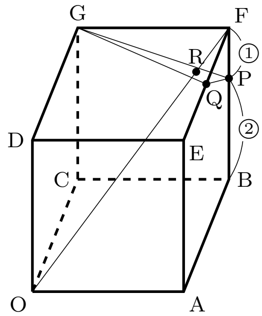
【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\vec{c}+\dfrac{2}{3}\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}$

(2) $s=\dfrac{5}{6}$

(3) $\mathrm{RS}=\dfrac{\sqrt{10}}{18}$

【解答】



(1) 与えられた条件より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}} \quad\cdots\cdots(\text{答})\\\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EQ}}\\&=\vec{a}+\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{c}\\&=\boldsymbol{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}} \quad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(2) R は直線 OF 上の点より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=s\overrightarrow{\mathrm{OF}} \quad (s\text{ は実数})\\&=s(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\\&=s\vec{a}+s\vec{c}+s\vec{d} \quad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

と表すことができる．また，R は平面 PQG 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OG}} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma\text{ は }\alpha+\beta+\gamma=1\text{ を満たす実数})\\&=\alpha\left(\vec{a}+\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+\beta\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)+\gamma(\vec{c}+\vec{d})\\&=(\alpha+\beta)\vec{a}+\left(\alpha+\frac{\beta}{2}+\gamma\right)\vec{c}+\left(\frac{2\alpha}{3}+\beta+\gamma\right)\vec{d} \quad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は 1 次独立なので，①，②の係数は一致する．さらに $\alpha+\beta+\gamma=1$ もあわせ

ると

$$\begin{cases} s=\alpha+\beta \\ s=\alpha+\dfrac{\beta}{2}+\gamma \\ s=\dfrac{2\alpha}{3}+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=1 \end{cases} \iff \begin{cases} s=\alpha+\beta \\ \alpha+\beta=\alpha+\dfrac{\beta}{2}+\gamma \\ \alpha+\beta=\dfrac{2\alpha}{3}+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=1 \end{cases} \iff \begin{cases} s=\alpha+\beta \\ \beta-2\gamma=0 \\ \alpha-3\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{3},\ \gamma=\frac{1}{6},\ \boldsymbol{s=\frac{5}{6}}$$ ……(答)

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{c}+\frac{5}{6}\vec{d}$$

である. ……(答)

(3) S は △PQG の重心であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{3}\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\vec{a}+\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)+\left(\vec{c}+\vec{d}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(2\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{c}+\frac{8}{3}\vec{d}\right)\\&=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{c}+\frac{8}{9}\vec{d}\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RS}}&=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\&=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{18}\vec{d}\\&=\frac{1}{18}(-3\vec{a}+\vec{d})\end{aligned}$$

である. ここで

$$|-3\vec{a}+\vec{d}|^2=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=9-0+1=10$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{18}}$$ ……(答)