$a,\ b$ をそれぞれ実数とする．4 次方程式 $x^4+ax^3+10x^2-12x+b=0$ は 2 重解 $x=2$ をもち，他の 2 つの解は虚数である．このとき，$a=\boxed{\text{カキ}}$ であり，2 つの虚数解は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\,i}{\boxed{\text{コ}}}$ である．ただし，i は虚数単位である．

(18 東邦大 医 2)

【答】

カキ	ク	ケ	コ
-5	1	7	2

【解答】

$$x^4+ax^3+10x^2-12x+b=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

①は 2 重解 $x=2$ を解にもつから

$$(x-2)^2(x^2+cx+d)=0 \quad (c,\ d \text{ は実数})$$

とおくことができる．展開すると

$$x^4+(c-4)x^3+(d-4c+4)x^2-4(d-c)x+4d=0$$

①と係数を比較して

$$\begin{cases} c-4=a \\ d-4c+4=10 \\ d-c=3 \\ 4d=b \end{cases} \iff \begin{cases} a=c-4 \\ d-4c=6 \\ d-c=3 \\ b=4d \end{cases}$$

$$\therefore \quad c=-1,\ d=2,\ a=\boldsymbol{-5},\ b=8 \qquad \cdots\cdots(答)$$

方程式は $(x-2)^2(x^2-x+2)=0$ であり，2 つの虚数解は

$$x=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 微分を利用することもできる．

$$P(x)=x^4+ax^3+10x^2-12x+b \qquad \cdots\cdots ㋐$$

とおくと

$$P'(x)=4x^3+3ax^2+20x-12 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

一方，$P(x)=0$ は 2 重解 $x=2$ をもつから

$$P(x)=(x-2)^2Q(x) \quad (Q(x) \text{ は 2 次式}) \qquad \cdots\cdots ㋒$$

とおくことができる．微分すると (数学 III)

$$P'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x) \qquad \cdots\cdots ㋓$$

である．㋒，㋓より

$$P(2)=0 \text{ かつ } P'(2)=0$$

であり，㋐，㋑に代入すると

$$\begin{cases} 8a+b+32=0 \\ 12a+60=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-5,\ b=8$$

これにより

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 12x + 8 \\ &= (x-2)^2(x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

2 つの虚数解は $x^2 - x + 2 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

- 上の解答では必要条件として $P(2) = P'(2) = 0$ を用いたが，実はこれは必要十分な条件である．すなわち

「整式 $P(x)$ と定数 α について

$$\text{方程式 } P(x) = 0 \text{ が } x = \alpha \text{ を重解にもつ} \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$$

である.」

証明しておこう.

$$P(x) = (x-\alpha)^2 Q(x) + ax + b \qquad \cdots\cdots \text{ⓐ}$$

とおくことができる．ⓐを微分して

$$P'(x) = 2(x-\alpha)Q(x) + (x-\alpha)^2 Q'(x) + a \qquad \cdots\cdots \text{ⓑ}$$

ⓐ，ⓑで，$x = \alpha$ とおくと

$$\begin{cases} P(\alpha) = a\alpha + b \\ P'(\alpha) = a \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a = P'(\alpha) \\ b = P(\alpha) - P'(\alpha)\alpha \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} & P(x) = 0 \text{ が } x = \alpha \text{ を重解にもつ} \\ \iff & P(x) \text{ は } (x-\alpha)^2 \text{ で割り切れる} \\ \iff & P(x) \text{ を } (x-\alpha)^2 \text{ で割った余りは } 0 \text{ である.} \\ \iff & \begin{cases} P'(\alpha) = 0 \\ P(\alpha) - P'(\alpha)\alpha = 0 \end{cases} \\ \iff & P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \end{aligned}$$