次の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．また，$\boxed{}$ にあてはまる最も適切なものを下の選択肢群から選び，その記号で答えよ．◯にあてはまる最も適切な記号を，マークシートの記号から選んで答えよ．

座標平面上で，次の x の 2 次関数のグラフを考える．ただし，a は定数とする．

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = -x^2 + 4x + a$$

このとき，次のことがいえる．

(1) $f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフが接するとき，

$$g(x) = -x^2 + 4x \textcircled{ア} \boxed{イ} \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，そのときの接点の座標は $\boxed{ウ}$ である．

また，①のグラフの頂点の座標は $\boxed{エ}$ である．

(2) すべての実数 x に対して $f(x) \geqq g(x)$ であるための a の条件は

$\boxed{オ}$

である．

(3) 範囲 $-3 \leqq x \leqq 2$ のすべての x に対して $f(x) < g(x)$ であるための a の条件を求めよう．

その条件は「$-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $g(x) - f(x) > 0$ となること」である．

$$g(x) - f(x) = -\boxed{カ}\left(x \textcircled{キ} \boxed{ク}\right)^2 \textcircled{ケ} a \textcircled{コ} \boxed{サ}$$

であるから，$g(x) - f(x)$ のグラフの軸 $x = \boxed{シ}$ の位置を考えると，その条件は

$$g\left(-\boxed{ス}\right) - f\left(-\boxed{ス}\right) > 0$$

である．

したがって，求める a の条件は

$\boxed{セ}$

である．

(4) $f(x) \geqq g(x)$ となる x が $-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲に存在するための a の条件は

$\boxed{ソ}$

である．

$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ の選択肢群：

あ $(-2,\ -5)$	い $(-2,\ -3)$	う $(-2,\ 3)$	え $(-2,\ 5)$
お $(-1,\ -2)$	か $(0,\ -1)$	き $(1,\ 2)$	く $(2,\ -5)$
け $(2,\ -3)$	こ $(2,\ 3)$		

オ，セ，ソ の選択肢群：

あ $a < -1$　　い $a \leqq -1$　　う $a < 1$　　え $a \leqq 1$　　お $a < 31$

か $a \leqq 31$　　き $a > -1$　　く $a \geqq -1$　　け $a > 31$　　こ $a \geqq 31$

(18 神戸学院大・栄養・薬・その他の学部 1)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
−	1	き	こ	い	2	−	1	+	+	1	1	3	け	か

【解答】

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = -x^2 + 4x + a$$

(1) $f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフが接する条件は

$$g(x) - f(x) = 0$$
$$-2x^2 + 4x + a - 1 = 0$$

が重解をもつことであるから，判別式を D とすると $D = 0$ である．

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (-2) \cdot (a - 1) = 2a + 2$$

より

$$a = -1$$

である．このとき

$$g(x) = -x^2 + 4x - \boxed{1} \quad \cdots\cdots ①$$ ……（ア，イの答）

であり，そのときの接点の座標は $(1,\ g(1))$ より，$(1,\ 2)$ き である．　……（ウの答）

また，①のグラフの頂点の座標は

$$g(x) = -(x - 2)^2 + 3$$

より，$(2,\ 3)$ こ である．　……（エの答）

(2) すべての実数 x に対して $f(x) \geqq g(x)$ であるための a の条件は，$D \leqq 0$ であり

$$a \leqq -1$$ い　……（オの答）

である．

(3) 範囲 $-3 \leqq x \leqq 2$ のすべての x に対して $f(x) < g(x)$ であるための a の条件は「$-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $g(x) - f(x) > 0$ となること」，すなわち「$-3 \leqq x \leqq 2$ における $g(x) - f(x)$ の最小値が 0 より大きいこと」である．

$$g(x) - f(x) = -\boxed{2}\left(x - \boxed{1}\right)^2 + a + \boxed{1}$$ ……（カ〜サの答）

であるから，$g(x) - f(x)$ のグラフの軸 $x = \boxed{1}$ の位置を考えると，　……（シの答）

その条件は

$$g\left(-\boxed{3}\right) - f(-3) > 0$$ ……（スの答）

$$-2(-4)^2 + a + 1 > 0$$
$$a - 31 > 0$$

である．

したがって，求める a の条件は

$$a > 31 \quad \boxed{\text{け}} \qquad \cdots\cdots \text{(セの答)}$$

である．

(4) $f(x) \geqq g(x)$ となる x が $-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲に存在するための a の条件は「$-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $g(x) - f(x) \leqq 0$ となる x が存在すること」，すなわち「$-3 \leqq x \leqq 2$ における $g(x) - f(x)$ の最小値が 0 以下であること」であり

$$g(-3) - f(-3) \leqq 0$$
$$a - 31 \leqq 0$$

である．

したがって，求める a の条件は

$$a \leqq 31 \quad \boxed{\text{か}} \qquad \cdots\cdots \text{(ソの答)}$$

である．