x を実数とする．このとき，実数全体からなる集合の 2 つの部分集合

$P(x) = \{y \mid t^2 + xt + |y| = 0$ をみたす実数 t が存在する $\}$

$Q(x) = \{y \mid$ すべての実数 t に対して $xt^2 + yt + 1 > 0$ が成り立つ $\}$

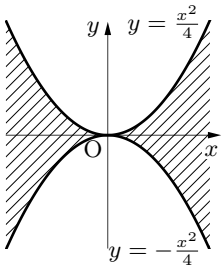
を考える．このとき $P(x) \subset Q(x)$ が成り立つための x に関する必要十分条件を求めよ．

(18 札幌医大 1(2))

【答】 $0 \leqq x < 4$

【解答】

$t^2 + xt + |y| = 0$ をみたす実数 t が存在するための条件は，
$t^2 + xt + |y| = 0$ の判別式を D_1 とすると，$D_1 \geqq 0$ であるから



$$x^2 - 4|y| \geqq 0$$

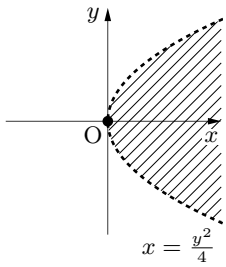
$$\therefore \quad |y| \leqq \frac{x^2}{4}$$

$$\therefore \quad -\frac{x^2}{4} \leqq y \leqq \frac{x^2}{4} \qquad \cdots\cdots ①$$

また，すべての実数 t に対して $xt^2 + yt + 1 > 0$ が成り立つ条件は

(i) $x = 0$ ならば，$y = 0$

(ii) $x \neq 0$ ならば，$xt^2 + yt + 1 = 0$ の判別式を D_2 とすると

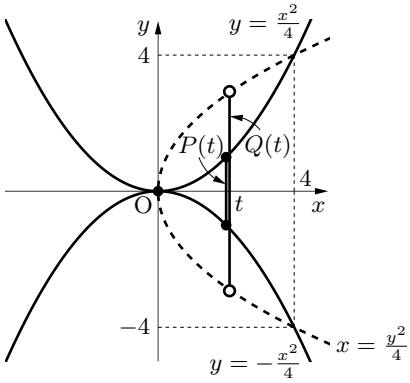


$$\begin{cases} x > 0 \\ D_2 < 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x > 0 \\ y^2 - 4x < 0 \end{cases}$$

したがって

$$(x,\ y) = (0,\ 0) \text{ または } \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{y^2}{4} < x \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，$y = \pm\dfrac{x^2}{4}$ と $x = \dfrac{y^2}{4}$ の共有点の x 座標は



$$x = \frac{1}{4}\left(\pm\frac{x^2}{4}\right)^2$$

$$\therefore \quad x^4 = 64x$$

$$\therefore \quad x(x-4)(x^2 + 4x + 16) = 0$$

x は実数より

$$x = 0,\ 4$$

$P(x)$, $Q(x)$ は x に関係する y の集合であり，
$P(x) \subset Q(x)$ が成り立つための x に関する必要十分条件は，①，②において x を t と固定したとき $P(t) \subset Q(t)$ が成り立つような t の値の集合である．

よって，求める条件は

$$\boldsymbol{0 \leqq x < 4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- x を固定し，①，②を満たす y の大小を考えてもよい．

$$① : -\frac{x^2}{4} \leqq y \leqq \frac{x^2}{4}$$

$$② : (x,\ y) = (0,\ 0) \text{ または } \begin{cases} x > 0 \\ -2\sqrt{x} < y < 2\sqrt{x} \end{cases} \quad \cdots\cdots ②'$$

(i) $x = 0$ のとき

①，②$'$ ともに $y = 0$ であり，$P(x) \subset Q(x)$ を満たす．

(ii) $x > 0$ のとき

$$P(x) \subset Q(x) \iff \frac{x^2}{4} < 2\sqrt{x}$$

$$\iff \frac{x^4}{16} < 4x$$

$$\therefore \quad x(x-4)(x^2+4x+16) < 0$$

$x^2 + 4x + 16 = (x+2)^2 + 12 > 0$ より

$$0 < x < 4$$

(i)，(ii) をあわせて

$$0 \leqq x < 4$$