次の問いに答えよ．

(1) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たす複素数 z の値を求めよ．また，このとき $\alpha=z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ．

(2) $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は，どのような図形を表すか．

(3) $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となる複素数 z と，$\left|w-\left(\dfrac{8}{3}+2i\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ を満たす複素数 w について，$|z-w|$ の最小値を求めよ．

(18 名古屋工大 1)

【答】

(1) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$，$\alpha=-1$

(2) 原点を除く実軸と原点を中心とする半径 1 の円周の和集合

(3) $\dfrac{4}{3}$

【解答】

(1)
$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3} \iff z^2-\sqrt{3}z+1=0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{z=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

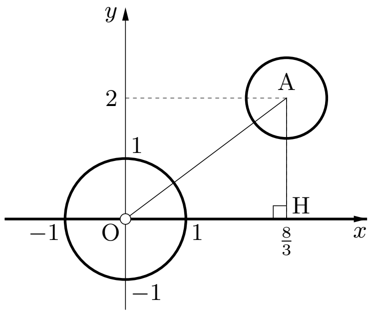
z を極形式で表すと
$$z=\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \quad (以下，複号同順)$$
であるから
$$\begin{aligned}
&z^{100}+\frac{1}{z^{100}}=z^{100}+z^{-100}\\
&=\left\{\cos\left(\pm\frac{100}{6}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{100}{6}\pi\right)\right\}+\left\{\cos\left(\pm\frac{-100}{6}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{-100}{6}\pi\right)\right\}\\
&=\left\{\cos\left(\frac{50}{3}\pi\right)\pm i\sin\left(\frac{50}{3}\pi\right)\right\}+\left\{\cos\left(\frac{50}{3}\pi\right)\mp i\sin\left(\frac{50}{3}\pi\right)\right\}\\
&=2\cos\left(\frac{50}{3}\pi\right)=2\cos\left(2\pi\times 8+\frac{2}{3}\pi\right)\\
&=\boldsymbol{-1} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$
である．

(2) $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となる条件は
$$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$
である．これを変形すると
$$\begin{aligned}
(*) &\iff z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\\
&\iff |z|^2z+\overline{z}=|z|^2\overline{z}+z \quad (\because\ z\fallingdotseq 0)\\
&\qquad (z-\overline{z})|z|^2-(z-\overline{z})=0\\
&\qquad (z-\overline{z})(|z|^2-1)=0\\
&\therefore\quad z=\overline{z}\ \text{または}\ |z|=1
\end{aligned}$$

よって，複素数 z $(\fallingdotseq 0)$ が表す複素数平面上の点全体は

原点を除く実軸と原点を中心とする半径 1 の円周の和集合 ……(答)

である．



(3) 複素数 z が表す点 P は (2) の図形上を動き，
$\left|w-\left(\dfrac{8}{3}+2i\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ を満たす点 Q(w) は $\dfrac{8}{3}+2i$ が表す点 A を中心とし，半径が $\dfrac{2}{3}$ の円周上を動く．

$|z-w|$ は線分 PQ の長さを表すから，線分 PQ の長さが最小となるときを考えると

(i) P が原点を除く実軸上にあるとき

A から下した垂線の長さを AH とおくと，線分 PQ の最小値は

$$(|z-w| \text{ の最小値})$$
$$=\text{AH}-(\text{半径})=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

(ii) P が単位円周上にあるとき

$$(|z-w| \text{ の最小値})$$
$$=\text{OA}-(2\text{ 円の半径の和})=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+2^2}-\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3}-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

(i)，(ii) の結果を比較すると，$|z-w|$ の最小値は

$$\boldsymbol{\frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．