xy 平面において，x, y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ．m を 1 以上の整数とするとき，放物線 $y = x^2 - 2mx + m^2$ と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D とする．

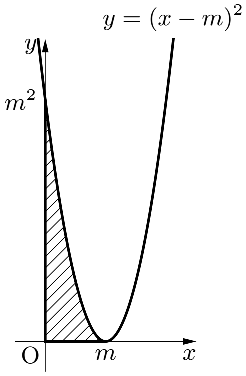
(1) D の周上の格子点の数 L_m を m で表せ．
(2) D の周上および内部の格子点の数 T_m を m で表せ．
(3) $T_m - \dfrac{m}{3}L_m$ の最大値とそのときの m の値を求めよ．

(18 東北大 後 経 1)

【答】

(1) $L_m = m^2 + 2m$
(2) $T_m = \dfrac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)$
(3) $m - 3$, 4 のとき，最大値 3

【解答】



(1) $y = (x-m)^2$ と x 軸および y 軸によって囲まれた図形 D は右図の斜線部分である．

D の周上の格子点の数 L_m は，$x = k$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 上の個数を数えると

$$\begin{aligned} L_m &= (m^2+1) + 2(m-1) + 1 \\ &= \boldsymbol{m^2 + 2m} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(2) D の周上および内部の格子点の数 T_m は，$x = k$ 上の個数が $(k-m)^2 + 1$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ より

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{k=0}^{m} \{(k-m)^2 + 1\} \\ &= \{m^2 + (m-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2\} + (m+1) \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) より

$$\begin{aligned} T_m - \frac{m}{3}L_m &= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6) - \frac{m}{3}(m^2+2m) \\ &= \frac{1}{6}(2m^3+3m^2+7m+6) - \frac{1}{3}(m^3+2m^2) \\ &= -\frac{1}{6}m^2 + \frac{7}{6}m + 1 \\ &= -\frac{1}{6}\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{73}{24} \end{aligned}$$

m は 1 以上の整数であるから，これを最大にする m は $\boldsymbol{m = 3,\ 4}$ のときであり，　$\cdots\cdots$(答)

最大値は $-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{73}{24} = \boldsymbol{3}$　$\cdots\cdots$(答)