関数 $f(x)$ は等式

$$f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)\,dt$$

を満たすとし，$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=a$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f(2)$ を a を用いて表せ．

(2) a の値を求めよ．

(3) k は定数とする．$y=xf(x)-k$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフの共有点の個数を求めよ．

(18 金沢大 人間社会 3)

【答】

(1) $f(2)=1+2a$

(2) $a=-1$

(3) $\begin{cases} k<0 \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ k=0 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ 0<k<\dfrac{1}{4} \text{ のとき} & 3\text{ 個} \\ k=\dfrac{1}{4} \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ \dfrac{1}{4}<k \text{ のとき} & 1\text{ 個} \end{cases}$

【解答】

(1) $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=a$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x)&=|x-1|+x\int_0^2 f(t)dt \\ &=|x-1|+ax \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

①で $x=2$ とおくと

$$f(2)=\mathbf{1+2a}$$ ……(答)

(2) 絶対値を外すように積分区間を分けると

$$\begin{aligned} a&=\int_0^2 f(t)\,dt \\ &=\int_0^1\{-(t-1)+at\}\,dt+\int_1^2\{(t-1)+at\}\,dt \\ &=\int_0^1\{(a-1)t+1\}dt+\int_1^2\{(a+1)t-1\}\,dt \\ &=\left[(a-1)\frac{t^2}{2}+t\right]_0^1+\left[(a+1)\frac{t^2}{2}-t\right]_1^2 \\ &=\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}\right) \\ &=2a+1 \end{aligned}$$

よって

$$a = 2a + 1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = -1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned} a &= \int_0^2 f(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \{-(t-1)+at\}\,dt + \int_1^2 \{(t-1)+at\}\,dt \\ &= \int_0^2 at\,dt - \int_0^1 (t-1)\,dt + \int_1^2 (t-1)\,dt \\ &= \left[a \cdot \frac{t^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 2a+1 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果より

$$f(x) = |x-1| - x$$

$y = xf(x) - k$ のグラフと $y = -x^2$ のグラフの共有点の個数は，方程式 $xf(x) - k = -x^2$ すなわち

$$xf(x) + x^2 = k$$

の実数解の個数と一致する．

$g(x) = xf(x) + x^2 = x|x-1|$ とおくと

$x \leqq 1$ のとき

$$g(x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$1 \leqq x$ のとき

$$g(x) = -x + x^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$y = g(x)$ のグラフは図のようになる．

求める共有点の個数は $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = k$ との共有点の個数であるから，図より

$$\begin{cases} k < 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ k = 0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 0 < k < \dfrac{1}{4} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ k = \dfrac{1}{4} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ \dfrac{1}{4} < k \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$