数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ は，次を満たすとする．

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{|a_{n-1}+1|}-1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ {a_{n-1}}^2+2a_{n-1} & (n \text{ が奇数で } n \geqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) n が奇数のとき，a_n を求めよ．

(2) n が偶数のとき，a_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(18 東北大 後 理 4)

【答】

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-1$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}-1$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

【解答】

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{|a_{n-1}+1|}-1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ {a_{n-1}}^2+2a_{n-1} & (n \text{ が奇数で } n \geqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) n が奇数で $n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= {a_{n-1}}^2+2a_{n-1} \\ &= (a_{n-1}+1)^2-1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{|a_{n-2}+1|}\right)^2-1 \\ &= \frac{1}{4}|a_{n-2}+1|-1 \end{aligned}$$

$n=3$ のとき　$a_{3-2}+1 = a_1+1 = 0+1 \geqq 1$

n が 5 以上の奇数のとき　$a_{n-2}+1 = (a_{n-3}+1)^2 \geqq 0$

であり，n が 3 以上の奇数のとき $a_{n-2}+1 \geqq 0$ である．したがって

$$a_n = \frac{1}{4}(a_{n-2}+1)-1$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}-\frac{3}{4}$$

よって，$n=2m+1$ とおくと

$$a_{2m+1} = \frac{1}{4}a_{2m-1}-\frac{3}{4} \quad (m \geqq 1)$$

$\alpha = \dfrac{1}{4}\alpha - \dfrac{3}{4}$ の解 $\alpha=-1$ を用いて変形すると

$$a_{2m+1}+1 = \frac{1}{4}(a_{2m-1}+1)$$

数列 $\{a_{2m-1}+1\}$ は初項 $a_1+1=1$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列より

$$a_{2m-1}+1=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}\quad(m\geqq 1)$$

$$a_n=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}\quad(n\text{ は奇数で }n\geqq 1)$$ ……(答)

(2) n が偶数のとき，(1) の結果より

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2}\sqrt{|a_{n-1}+1|}-1\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}-1\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}-1\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}-1\end{aligned}$$

$$a_n=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}-1}$$ ……(答)

(3) (1) と (2) の結果より

$$n\text{ が奇数のとき；}\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}=-1$$

$$n\text{ が偶数のとき；}\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}-1\right\}=-1$$

したがって

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=-1}$$ ……(答)